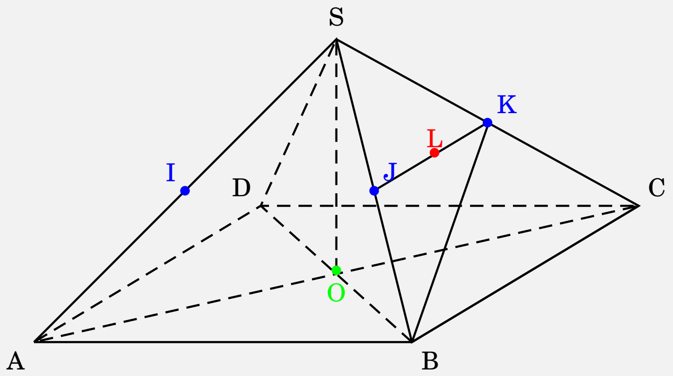
Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point O est le centre du carré ABCD.
On suppose que : OA = OB = OS = 1.
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AS], [BS], [CS] et [JK].

1. Les droites suivantes sont **coplanaires** :

   a. (AD) et (OJ) **b.** (AC) et (JK) **c.** (IJ) et (DC) **d.** (AB) et (DS)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(O\ ;\ \overrightarrow{0B},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\,;\ A(0\ ;\ -1\ ;\ 0)\,;\ B(1\ ;\ 0\ ;\ 0)\,;\ C(0\ ;\ 1\ ;\ 0);D(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)\,;\ S(0\ ;\ 0\ ;\ 1).$$

2. Les coordonnées des points I,J,K et L sont :

   a. $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **b.** $J\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ **c.** $K\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **d.** $L\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$

3. Les arêtes de la pyramides sont de longueur :

   a. 1 **b.** $\sqrt{2}$ **c.** 2 **d.** $\sqrt{3}$

4. Le triangle BJK est :

   a. Isocèle **b.** équilatéral **c.** Rectangle en J **d.** Quelconque

5. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BS}$ sont :

   a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

6. Une représentation paramétrique de la droite (SB) est :

   a. $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&0\\y&=&1+t\\z&=&-t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&-1+2t\\y&=&0\\z&=&1+2t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&1-t\\y&=&0\\z&=&t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcr}x&=&-1-t\\y&=&0\\z&=&1-t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$

7. Une équation cartésienne du plan (IJK) est :

   a. $x-y+z-1=0$ **b.** $z-\frac{1}{2}=0$ **c.** $x+z-1$ **d.** $x+y+z=1$

Solution

1. Les droites (IJ) et (DC) sont toutes deux parallèles à (DC) donc parallèles entre elles ; elles sont donc coplanaires : **Réponse c.**
2. Les coordonnées des points I,J,K et L sont :

- Le milieu I de [AS] a pour coordonnées $\left(0\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu J de [BS] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu K de [CS] a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu L de [JK] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Réponse d.

3. Les arêtes son toutes de longueur BC. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OBC rectangle en O, on obtient BC=$\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$:
   Réponse b.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{\text{JK}}$,$\overrightarrow{\text{BJ}}$ et $\overrightarrow{\text{BK}}$ ont pour coordonnées :
   $\overrightarrow{\text{JK}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$,$\overrightarrow{\text{BJ}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BK}}=\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Les normes de ces vecteurs sont les longueurs des cotés du triangle BJK.
   On a donc :
   $\|\overrightarrow{\text{JK}}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\|\overrightarrow{\text{BJ}}\|=\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\|\overrightarrow{\text{BK}}\|=\sqrt{(-1)^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$.
   Le triangle BJK est isocèle (car KJ=BJ) mais il n'est pas rectangle en J car il ne vérifie pas le théorème de Pythagore, en effet $JK^2+BJ^2=\frac{1}{2}\neq BK^2=\frac{3}{2}$.
5. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{BS}}$ sont :
   $$\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$
   Réponse d.
6. La droite (BS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BS}\,(-1\ ;\ 0\ ;\ 1)$; la seule représentation paramétrique qui convienne est :
   $$\left\{\begin{array}{l}x=\quad 1-t\\ y=0,\quad t\in\mathbb{R}\\ z=\qquad t\end{array}\right.$$
   Réponse c.
7. Une équation cartésienne du plan (IJK) :
   On procède par élimination.
   - Le plan d'équation $x-y+z-1=0$ ne contient pas K$\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$; on élimine **a.**
   - Le plan d'équation $x+z-1=0$ ne contient pas K$\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$; on élimine **c.**
   - Le plan d'équation $x+y+z=1$ ne contient pas I$\left(0\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$; on élimine **d.**

   En effet le plan (IJK) est parallèle à la base de la pyramide et coupe l'axe des z au point de cote $z=\frac{1}{2}$, il a pour équation cartésienne : $z=\frac{1}{2}$.

   Réponse b.