Exercice 1

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

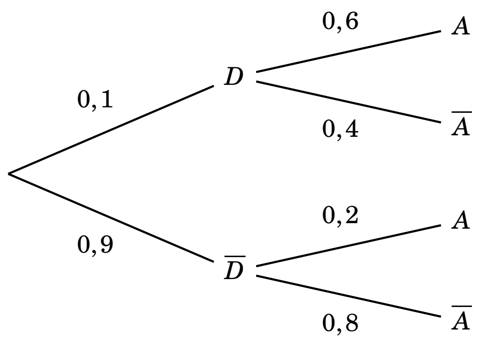
Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.
   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
   (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
   (b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
   (a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
   (b) à partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?

Correction

Partie 1

1. On représente la situation par l'arbre pondéré suivant :



2. La probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école est :

$$P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$$

.

3. La probabilité de l'évènement A est $P(A)$.
   (D et $\overline{D}$) forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,24$$

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. La probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné est :

$$P_A(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,24} = 0,75$$

Partie II

1. (a) La probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $p = 0,24$, et on choisit un échantillon de 7 candidats donc $n = 7$. Donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(7\,;0,24)$.

   (b) La probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école est :

$$P(X=1) = \binom{7}{1} \times 0,24^1 \times (1-0,24)^{7-1} \approx 0,32$$

   (c) La probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école est :

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0,47 = 0,53$$

   La valeur de $P(X \leqslant 1)$ s'obtient grâce à la calculatrice.

2. (a) La variable aléatoire Y qui donne le nombre d'admis parmi les n candidats présentés suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;0,24)$.
   La probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école est :

$$P(Y=0) = \binom{n}{0} \times 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n$$

   (b) On cherche à partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à 0,99.
   On veut donc que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$ c'est-à -dire $1 - P(Y=0) \geqslant 0,99$ ou encore
   $P(Y=0) \leqslant 0,01$. On résout l'inéquation d'inconnue n : $0,76^n \leqslant 0,01$:

$$0,76^n \leqslant 0,01 \iff \ln\left(0,76^n\right) \leqslant \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,76) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)}$$

   Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \approx 16,8$. Il faut prendre le premier entier supérieur à 16,8 donc c'est à partir de 17 élèves que la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à 0,99.