# Correction

## Partie A

1. $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$ donc $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x} + x \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} = (1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$ et donc
   $f''(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + (1-2x) \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} = (-2-2+4x)\mathrm{e}^{-2x} = 4(x-1)\mathrm{e}^{-2x}$
   **Réponse b.**
2. Si $x \in [0\ ,\ 2]$, $f'(x) \leq 0$, donc la fonction $f$ est **décroissant** sur $[0\ ,\ 2]$.
   Si $x \in [2\ ,\ 5]$, $f'(x) \geq 0$, donc la fonction $f$ est **croissante** sur $[2\ ,\ 5]$.
   et si $x \in [5\ ,\ 7]$, $f'(x) \leq$, donc $f$ est **décroissante** sur $[5\ ,\ 7]$.
   **Réponse b.**
3. La fonction $f$ est croissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$ donc $f'$ est positive sur $]-\infty\ ;\ -1]$.
   **Réponse b.**

## Partie B

**Affirmation 1 :** Une équation de la tangente $t$ au point A d'abscisse $x_0$ à la courbe représentative de la fonction $f$ est donnée par :$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

On a $x_0 = 1$, donc $f(x_0) = f(0) = -2 + 3\mathrm{e}^0 = -2 + 3 = 1$ et $f$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ on a $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (3-x)\mathrm{e}^x = (2-x)\mathrm{e}^x$, d'où $f'(x_0) = f'(0) = 2\mathrm{e}^0 = 2$. Donc une équation de $t$ est :$y - 1 = 2(x-0)$ d'où $y = 2x+1$. L'affirmation est vraie.

**Affirmation 2 :** On a quel que soit le réel $x$ : $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + \dfrac{3}{x} = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{3}{x\mathrm{e}^x}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x\mathrm{e}^x} = 0$, d'où par sommes des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{3}{x\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$ et par produit de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1 + \frac{3}{x\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$$

L'affirmation est fausse.

**Affirmation 3 :** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x + \mathrm{e}^{-x}$

$f$ somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = -1 - \mathrm{e}^{-x} = -(1+\mathrm{e}^{-x}) < 0$ car quel que soit le réel $x$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $1 + \mathrm{e}^{-x} > 1$ puis $-(1+\mathrm{e}^{-x}) < -1 < 0$.

La fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

De même $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Comme $f(0) = 1 + 1 = 2 > 0$ et $f(2) = 1 - 2 + \mathrm{e}^{-2} \approx -0,86 < 0$, on a bien $0 < x_0 < 2$. L'affirmation est vraie.

**Affirmation 4 :** On a $g'(x) = 2x - 5 + \mathrm{e}^x$ et $g''(x) = 2 + \mathrm{e}^x$. On sait pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ on a alors $g''(x) = 2 + \mathrm{e}^x > 2 > 0$. La fonction $g$ est donc convexe sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est vraie.