Exercice 2

Partie A

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte.

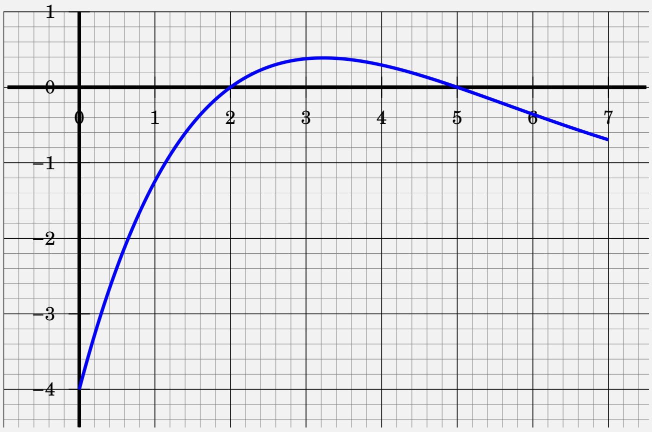
1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

a. $(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$ **b.** $4(x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ **c.** $4\mathrm{e}^{-2x}$ **d.** $(x+2)\mathrm{e}^{-2x}$

2. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;\,7]$.



Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ est :

a.

x	0		3,25		7
$f(x)$		↗		↘	

b.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↘		↗		↘	

c.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↗		↘		↗	

d.

x	0		2		7
$f(x)$		↗		↘	

3. On se donne une fonction f, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

D'après ce tableau de variation :

a. f' est positive sur $\mathbb{R}$. **b.** f' est positive sur $]-\infty\,;\,-1]$.
c. f' est négative sur $\mathbb{R}$. **d.** f' est positive sur $[-1\,;\,+\infty[$.

Partie B

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 : Dans le plan muni d'un repère, la tangente au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 + (3-x)\mathrm{e}^{x}$ admet pour équation réduite $y = 2x+1$.

Affirmation 2 : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + \frac{3}{x}\right) = 0$.

Affirmation 3 : L'équation $1 - x + \mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une seule solution appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$.

Affirmation 4 : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 5x + \mathrm{e}^{x}$ est convexe.

Correction

Partie A

1. $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$ donc $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x} + x \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} = (1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$ et donc
$f''(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + (1-2x) \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} = (-2-2+4x)\mathrm{e}^{-2x} = 4(x-1)\mathrm{e}^{-2x}$
Réponse b.
2. Si $x \in [0~,~2]$, $f'(x) \leq 0$, donc la fonction f est **décroissant** sur $[0~,~2]$.
Si $x \in [2~,~5]$, $f'(x) \geq 0$, donc la fonction f est **croissante** sur $[2~,~5]$.
et si $x \in [5~,~7]$, $f'(x) \leq$, donc f est **décroissante** sur $[5~,~7]$.
Réponse b.
3. La fonction f est croissante sur $]-\infty~;~-1]$ donc f' est positive sur $]-\infty~;~-1]$.
Réponse b.

Partie B

Affirmation 1 : Une équation de la tangente t au point A d'abscisse x_0 à la courbe représentative de la fonction f est donnée par :$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

On a $x_0 = 1$, donc $f(x_0) = f(0) = -2 + 3\mathrm{e}^0 = -2 + 3 = 1$ et f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ on a $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (3-x)\mathrm{e}^x = (2-x)\mathrm{e}^x$, d'où $f'(x_0) = f'(0) = 2\mathrm{e}^0 = 2$. Donc une équation de t est :$y - 1 = 2(x-0)$ d'où $y = 2x+1$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 2 : On a quel que soit le réel x : $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + \dfrac{3}{x} = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{3}{x\mathrm{e}^x}\right)$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x\mathrm{e}^x} = 0$, d'où par sommes des limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^x - 1 + \frac{3}{x\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$ et par produit de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1 + \frac{3}{x\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$$

L'affirmation est fausse.

Affirmation 3 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x + \mathrm{e}^{-x}$

f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = -1 - \mathrm{e}^{-x} = -(1+\mathrm{e}^{-x}) < 0$ car quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $1 + \mathrm{e}^{-x} > 1$ puis $-(1+\mathrm{e}^{-x}) < -1 < 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

De même $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Comme $f(0) = 1 + 1 = 2 > 0$ et $f(2) = 1 - 2 + \mathrm{e}^{-2} \approx -0{,}86 < 0$, on a bien $0 < x_0 < 2$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 4 : On a $g'(x) = 2x - 5 + \mathrm{e}^x$ et $g''(x) = 2 + \mathrm{e}^x$. On sait pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ on a alors $g''(x) = 2 + \mathrm{e}^x > 2 > 0$. La fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est vraie.