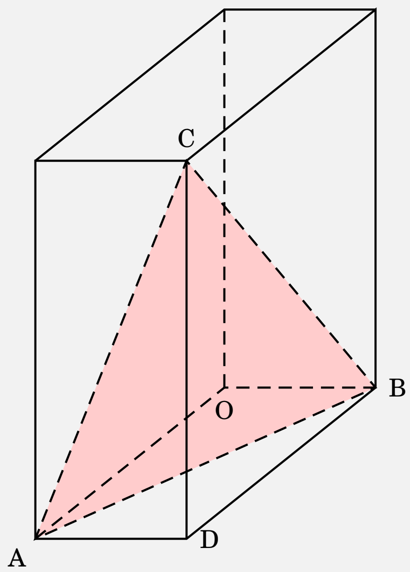
Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points :
A de coordonnées $(2\,;0\,;0)$, B de coordonnées $(0\,;1\,;0)$, C de coordonnées $(2\,;1\,;3)$ et D coordonnées $(2\,;1\,;0)$.



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\6\\-2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x+6y-2z-6=0$.
2. On note d la droite passant par D et orthogonale au plan (ABC).
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   (b) Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{80}{49}\ ;\ \frac{13}{49}\ ;\ \frac{12}{49}\right)$.
   (c) Calculer la distance DH.
   (d) En utilisant la formule qui donne la distance d'un point à un plan, retrouver la valeur de DH.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V=\dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide DABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

Solution

1. (a) Pour montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), il suffit de démontrer que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC), par exemple $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
   $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $(-2\ ;\ 1\ ;\ 0)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{n}=-2\times3+1\times(6)+0\times(-2)=0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{n}$.
   $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ a pour coordonnées $(0\ ;\ 1\ ;\ 3)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{n}=0\times3+1\times6+3\times(-2)=0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{n}$.
   Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC).
   (b) Le plan (ABC) est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{n}$, c'est-à -dire $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{n}=0$. Or $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ a pour coordonnées $(x-2\ ;\ y\ ;\ z)$.
   $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{n}=0 \iff (x-2)\times3+y\times6+z\times(-2)=0 \iff 3x+6y-2z-6=0$

Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne $3x+6y-2z-6=0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

(a) La droite d est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$ normal à (ABC).

De plus elle passe par le point D de coordonnées (2 ; 1 ; 0).

La droite d a donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 3t+2 \\ y &= 6t+1, \quad t\in\mathbb{R} \\ z &= -2t \end{cases}$

(b) La droite d coupe le plan (ABC) au point H.

Les coordonnées du point H vérifient le système $\begin{cases} x_{\text{H}} &= 3t+2 \\ y_{\text{H}} &= 6t+1 \\ z_{\text{H}} &= -2t \\ 3x_{\text{H}}+6y_{\text{H}}-2z_{\text{H}}-6 &= 0 \end{cases}$

Donc $3\times(3t+2)+6\times(6t+1)-2\times(-2)t-6=0$ ce qui équivaut à $9t+6+36t+6+4t-6=0$ ou $49t=-6$ donc $t=-\frac{6}{49}$.

$x=3t+2$ donc $x=\frac{-18}{49}+1=\frac{80}{49}$, $y=6t+1$ donc $y=\frac{-36}{49}+1=\frac{13}{49}$, et $z=-2t$ donc $z=\frac{12}{49}$.

Le point H a donc pour coordonnées $\left(\frac{80}{49}\ ;\ \frac{13}{49}\ ;\ \frac{12}{49}\right)$.

(c) Le vecteur $\overrightarrow{\text{DH}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{80}{49}-2 \\ \frac{13}{49}-1 \\ \frac{-12}{49}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{49} \\ \frac{-36}{49} \\ \frac{12}{49} \end{pmatrix}$ Donc DH $=\sqrt{\dfrac{1764}{49^2}}=\dfrac{42}{49}=\dfrac{6}{7}$.

(d) La distance du point D au plan (ABC) est donnée par : $\dfrac{|3x_D+6y_D-2z_D-6|}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}}=\dfrac{|3\times2+6\times1-2\times0-6|}{\sqrt{49}}=\dfrac{6}{7}$. On retrouve bien le même résultat.

3. On peut calculer le volume de la pyramide DACB de deux manières différentes :

- Si on considère que la pyramide DABC a pour base le triangle ADB et pour Hauteur DC=3, son volume est alors donnée par : $V=\frac{1}{3}\mathscr{B}\times DC$, où $\mathscr{B}$ est l'aire du triangle ADB, $\mathscr{B}=\frac{1}{2}AD\times BD=\frac{1}{2}\times1\times2=1$. Donc $V=\frac{1}{3}\times1\times3=1$.
- Si on prend le triangle ABC pour base de la pyramide DABC, la hauteur est $DH=\frac{6}{7}$, et le volume est donné par$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}'\times\text{DH}$ où $\mathscr{B}'$ est l'aire du triangle ABC, on a alors l'égalité $1=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{B}'\times\frac{6}{7}$ ce qui donne $\mathscr{B}'=\frac{7}{2}$.

L'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{7}{2}$.

Remarque; On peut vérifier ce dernier résultat en utilisant la formule de Héron qui permet de calculer l'aire $\mathscr{A}$ d'un triangle quelconque en ne connaissant que les longueurs a,b et c de ses trois côtés : $\mathscr{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ avec $p=\frac{a+b+c}{2}$. On utilise le théorème de Pythagore pour calculer les longueurs des cotés du triangle ABC, on trouve $a=BC=\sqrt{13}$, $b=AC=\sqrt{10}$ et $c=AB\sqrt{5}$. Avec une calculatrice on trouve bien $S=3.5$.