Correction

1. (a) Pour montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), il suffit de démontrer que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC), par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2~;~1~;~0)$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}=-2\times 3+1\times(6)+0\times(-2)=0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n}$.
$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(0~;~1~;~3)$ donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n}=0\times 3+1\times 6+3\times(-2)=0$ donc $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{n}$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC).

   (b) Le plan (ABC) est l'ensemble des points $M(x~;~y~;~z)$ tels que $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{n}$, c'est-à -dire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$. Or $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-2~;~y~;~z)$.
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0 \iff (x-2)\times 3+y\times 6+z\times(-2)=0 \iff 3x+6y-2z-6=0$
Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne $3x+6y-2z-6=0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

   (a) La droite d est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à (ABC).
De plus elle passe par le point D de coordonnées $(2~;~1~;~0)$.
La droite d a donc pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3t+2\\ y &=& 6t+1, \quad t\in\mathbb{R}\\ z &=& -2t\end{array}\right.$

   (b) La droite d coupe le plan (ABC) au point H.
Les coordonnées du point H vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcl} x_{\text{H}} &=& 3t+2\\ y_{\text{H}} &=& 6t+1\\ z_{\text{H}} &=& -2t\\ 3x_{\text{H}}+6y_{\text{H}}-2z_{\text{H}}-6 &=& 0\end{array}\right.$
Donc $3\times(3t+2)+6\times(6t+1)-2\times(-2)t-6=0$ ce qui équivaut à $9t+6+36t+6+4t-6=0$ ou $49t=-6$ donc $t=-\frac{6}{49}$.
$x=3t+2$ donc $x=\frac{-18}{49}+1=\frac{80}{49}$, $y=6t+1$ donc $y=\frac{-36}{49}+1=\frac{13}{49}$, et $z=-2t$ donc $z=\frac{12}{49}$.
Le point H a donc pour coordonnées $\left(\frac{80}{49}~;~\frac{13}{49}~;~\frac{12}{49}\right)$.

   (c) Le vecteur $\overrightarrow{DH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{80}{49}-2\\ \frac{13}{49}-1\\ \frac{-12}{49}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{18}{49}\\ \frac{-36}{49}\\ \frac{12}{49}\end{pmatrix}$ Donc $\text{DH}=\sqrt{\dfrac{1764}{49^2}}=\dfrac{42}{49}=\dfrac{6}{7}$.

   (d) La distance du point D au plan (ABC) est donnée par : $\dfrac{|3x_D+6y_D-2z_D-6|}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}}=\dfrac{|3\times 2+6\times 1-2\times 0-6|}{\sqrt{49}}=\dfrac{6}{7}$. On retrouve bien le même résultat.

3. On peut calculer le volume de la pyramide DACB de deux manières différentes :

   - Si on considère que la pyramide DABC a pour base le triangle ADB et pour Hauteur DC=3, son volume est alors donnée par : $V=\frac{1}{3}\mathscr{B}\times DC$, où $\mathscr{B}$ est l'aire du triangle ADB, $\mathscr{B}=\frac{1}{2}AD\times BD=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$. Donc $V=\frac{1}{3}\times 1\times 3=1$.
   - Si on prend le triangle ABC pour base de la pyramide DABC, la hauteur est $DH=\frac{6}{7}$, et le volume est donné par$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}'\times\text{DH}$ où $\mathscr{B}'$ est l'aire du triangle ABC, on a alors l'égalité $1=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{B}'\times\frac{6}{7}$ ce qui donne $\mathscr{B}'=\frac{7}{2}$.

L'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{7}{2}$.
Remarque; On peut vérifier ce dernier résultat en utilisant la formule de Héron qui permet de calculer l'aire $\mathscr{A}$ d'un triangle quelconque en ne connaissant que les longueurs a,b et c de ses trois côtés : $\mathscr{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ avec $p=\frac{a+b+c}{2}$. On utilise le théorème de Pythagore pour calculer les longueurs des cotés du triangle ABC, on trouve $a=BC=\sqrt{13}$, $b=AC=\sqrt{10}$ et $c=AB\sqrt{5}$. Avec une calculatrice on trouve bien $S=3.5$.