Exercice 2

Pour chaque question, trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 13n + 15$.
   A. La suite (u_n) est minorée.
   B. La suite (u_n) est décroissante.
   C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2022.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 10$.
   On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil :
  u = 2
  n = 0
  while u < 30 :
    u = 0,75*u + 10
    n = n+1
  return n
```

   Cette fonction renvoie :
   A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 30$;
   B. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 30$;
   C. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 30$.
3. On considére les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   On considére de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
   On peut affirmer que :
   A. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
   B. La suite (u_n) est minorée par 1.
   C. La suite (w_n) converge vers 1.
4. On considére deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :
   - pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
   - $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 2$.

   On peut affirmer que :
   A.la suite (U_n) converge ;
   B. pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$;
   C. la suite (U_n) est majorée.

Solution

1. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = n^2 - 13n + 15 = \left(n - \frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 15 = \left(n - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{169}{4} + \frac{60}{4} = \left(n - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{109}{4}$$

   Puisque, pour tout entier naturel n, $\left(n - \frac{13}{2}\right)^2 \geqslant 0$, on a alors quelque soit n, $u_n \geqslant -\frac{109}{4}$: la suite est donc minorée :Réponse **A.**
2. Dans la boucle while le calcul successif des termes u_n s'effectue jusqu'à ce que u_n devient supérieur ou égal à 30, la valeur de n correspondante est alors renvoyée. Cette valeur est la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 30$: Réponse **A.**
3. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$. Les suites (u_n) et (v_n) admettent la mêmes limite 1 ; d'après le théorème d'encadrement (dit « des gendarmes »), la suite (w_n) converge vers la même limite, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$: Réponse **C.**

4. On sait, d'après le cours que toute suite convergente est bornée ; donc la suite (V_n) est majorée et donc il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_n \leqslant M$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leqslant V_n$; on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \leqslant M$ et donc que la suite (U_n) est majorée : Réponse **C.**