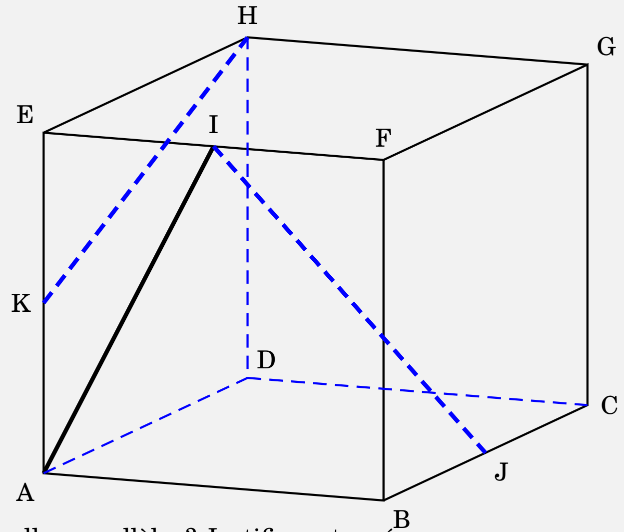
Exercice 3

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse,

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

2. (a) Donner les coordonnées des points I et J.

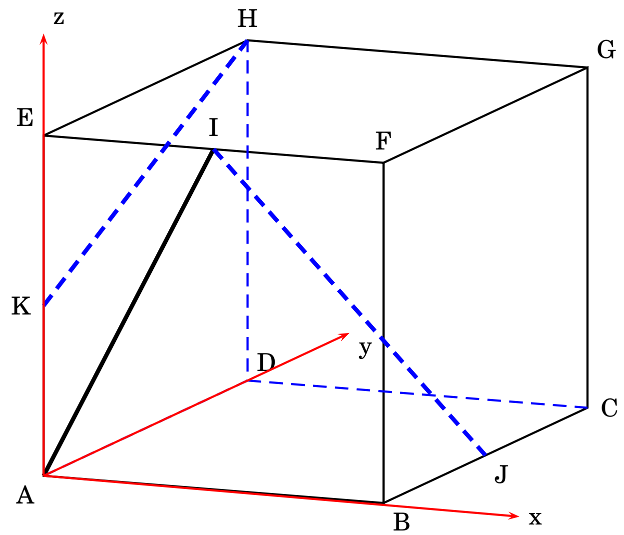
   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t \\ y & = & 8-2t \\ z & = & -2+3t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 8+2t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
5. Montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathscr{P}$.

Correction



1. Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, les points I, K et H ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,1\right)$, $\left(0\,,\,0\,,\,\frac{1}{2}\right)$ et $(0\,,\,1\,,\,1)$

   Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{KH}}$ ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,1\right)$ et $\left(0\,,\,1\,,\,\frac{1}{2}\right)$.Comme ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, les deux vecteurs $\overrightarrow{(AI)}$ et $\overrightarrow{(KH)}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites (AI)et (KH) ne sont pas parallèles.

2. (a) E et F ont pour coordonnées respectives $\mathrm{E}(0\,,\,0\,,\,1)$ et $\mathrm{F}(1\,,\,0\,,\,1)$ Le milieu I de $[EF]$ a pour coordonnées $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,1\right)$.

   (b) On a $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,-1\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\,(0\,,\,0\,,\,1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(1\,,\,1\,,\,0)$.

   On remarque que $2\left(\overrightarrow{\mathrm{IJ}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est s'écrit comme combinaison des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

3. $\overrightarrow{u}\,(1\,;\,-2\,;\,3)$ est un vecteur directeur de la droite d_1 et $\overrightarrow{v}\,(1\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur directeur de la droite d_2, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

4. Le plan a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,3\,;\,-2)$, on remarque que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas colinéaires donc la droite d_1 n'est pas parallèle à $\mathscr{P}$.

   Le produit scalaire $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=1+3-4=0$: les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux donc la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

5. On a $\overrightarrow{\mathrm{ML}}(-1\,;\,-3\,;\,2)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{ML}}=-\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

   D'autre part le point $\mathrm{L}(4\,;\,0\,;\,3)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ car ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{P}$ en effet $4+3\times 0-2\times 3+2=6-6=0$, donc L est le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathscr{P}$.