**EXERCICE 3**

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).
Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.
On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle **et** d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.
   - **a.** Déterminer le nombre de tirages possibles.
   - **b.** Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

**Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.**

Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\dfrac{3}{7}$.

2. Pour jouer, le joueur doit payer $k$ euros, $k$ désignant un entier naturel non nul.
   Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.
   On note $G$ la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de $G$.
   - **b.** Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?
3. Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
   On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.
   - **a.** Justifier que $X$ suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
   - **b.** Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-3}$, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.
   - **c.** Calculer $P(X \geqslant 5)$ en arrondissant à $10^{-3}$. Donner une interprétation du résultat obtenu.
   - **d.** Déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$.

## Correction

**1.** **a.** Il y a $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$ tirages différents.

**b.** Il y a $\binom{6}{1} \times \binom{2}{1} = 6\times2 = 12$ tirages gagnant. La probabilités de gagner à ce jeu est donc égale à $\dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7}$.

**2.** **a.** La variable aléatoire $G$ ne peut prendre que deux valeurs :$10 - k$ et $-k$. On a $P(G = 10 - k) = \dfrac{3}{7}$ et $P(G = -k) = \dfrac{4}{7}$.

**b.** L'espérance mathématique de la variable aléatoire $G$ est égale à
$E(G) = -k \times \dfrac{4}{7} + (10 - k) \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{30 - 7k}{7}$.
Le jeu est favorable au joueur si :
$E(G) > 0 \iff \dfrac{30 - 7k}{7} \iff 30 - 7k > 0 \iff 7k < 30 \iff k < \dfrac{30}{7}$.
$\dfrac{30}{7} \approx 4,28$.
La somme payée ne doit pas dépasser 4,28 €pour que le jeu reste favorable au joueur.

**3.** **a.** Les tirages effectués par les joueurs sont identiques et indépendants. Chaque joueur a une probabilité de gagner de $\dfrac{3}{7}$ ; $X$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{3}{7}$.

**b.** On a $p(X = 4) = \binom{10}{4}\left(\dfrac{3}{7}\right)^4\left(1 - \dfrac{3}{7}\right)^{10-4} \approx 0{,}247$. a probabilité quil y ait exactement 4 joueurs gagnants est environ égale à 0,247.

**c.** A l'aide de la calculatrice on obtient $p(X \geqslant 5) \approx 0,440$. La probabilité quil y ait plus de 5 gagnants est environ 0,440.

**d.** On a $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9 \iff 1 - P(X > n) \geqslant 0,9 \iff P(X > n) \leqslant 0,1$.
La calculatrice donne $P(X > 1) \approx 0,031$ ;
$P(X > 2) \approx 0,125$.
Le plus Petit entier $n$ tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$ est donc $n = 1$.