Correction

1.
   - $u_1 = 0,85 \times u_0 + 300 = 0,85 \times 12\,000 + 300 = 10\,500$.
   - $u_2 = 0,85 \times u_1 + 300 = 0,85 \times 10\,500 + 300 = 9\,225$.
2. (a) Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n > 2\,000$.
   - **Initialisation** : $u_0 = 12\,000 > 2\,000$: $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité** : Supposons que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un entier n, c'est à dire que $u_n > 2000$ (c'est hypothèse de récurrence) et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
     Si pour un rang $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 2\,000$, alors par produit par $0,85 > 0$, on a $0,85u_n > 0,85 \times 2\,000$, soit : $0,85u_n > 1\,700$, et en ajoutant 300 à chaque membre :$0,85u_n + 300 > 1\,700 + 300$, c'est-à -dire $u_{n+1} > 2\,000$: La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion** : La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$. On a donc $u_n > 2\,000$ quel que soit l'entier naturel n.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0.85u_n + 300 - u_n = -0.15u_n + 300$.
   D' après la question précédente, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2000$ alors par produit par $-0,15 < 0$, on a $-0,15u_n < -0,15 \times 2\,000$, soit : $-0,15u_n < -300$ et en ajoutant 300 à chaque membre :

   $$-0,15u_n + 300 < -300 + 300, \text{ ce qui donne } -0,15u_n + 300 < 0$$

   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -0.15u_n + 300 < 0$, la suite (u_n) est donc strictement décroissante.
   La suite (u_n) est décroissante et minorée par $2\,000$, elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 2\,000$.
3. (a) Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 2\,000 = 12\,000 - 2\,000 = 10\,000$.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,000 = 0,85u_n + 300 - 20\,000 = 0,85u_n - 1\,700 = 0,85\left(u_n - \frac{1\,700}{0,85}\right) = 0,85(u_n - 2\,000) = 0,85v_n$$

   L'égalité $v_{n+1} = 0,85v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,85$.

   (c) le résultat précédent, on sait que que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,85^n = 10\,000 \times 0,85^n$.
   Or $v_n = u_n - 2\,000 \iff u_n = v_n + 2\,000 = 10\,000 \times 0,85^n + 2\,000$.

   (d) Comme $0 < 0,85 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,85^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2000 \times 0,85^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2000$ (par somme de limites).
4. u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de $2\,000$ soit moins d'un quart de la population initiale : le responsable a raison.