Exercice 3

On considére la suite (u_n) définie par $u_0 = 12\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,85u_n + 300.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,225$.
2. (a) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

   $$u_n > 2\,000.$$

   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n, on considére la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 2\,000$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel n :

   $$u_n = 2\,000 + 10\,000 \times 0,85^n.$$

   (d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
4. En 2020, une espèce animale comptait 12 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 15 % chaque début d'année.

   Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 300 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

   Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de trois quarts de la population ».

   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.