Exercice 3

On considére la suite (u_n) définie par $u_0 = 12000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,85u_n + 300.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9225$.
2. (a) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 2000.$$

   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n, on considére la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 2000$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2000 + 10000 \times 0,85^n.$$

   (d) Quelle est la limite de la suite (u_n)?
4. En 2020, une espéce animale comptait 12 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 15 % chaque début d'année.
   Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 300 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.
   Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de trois quarts de la population ».
   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Solution

1. • $u_1 = 0,85 \times u_0 + 300 = 0,85 \times 12000 + 300 = 10500.$
   • $u_2 = 0,85 \times u_1 + 300 = 0,85 \times 10500 + 300 = 9225.$
2. (a) Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n > 2000$.
   - **Initialisation** : $u_0 = 12000 > 2000$: $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité** : Supposons que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un entier n, c'est à dire que $u_n > 2000$ (c'est hypothèse de récurrence) et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
     Si pour un rang $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 2000$, alors par produit par $0,85 > 0$, on a $0,85u_n > 0,85 \times 2000$, soit : $0,85u_n > 1700$, et en ajoutant 300 à chaque membre :$0,85u_n + 300 > 1700 + 300$, c'est-à -dire $u_{n+1} > 2000$: La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion** : La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$. On a donc $u_n > 2000$ quel que soit l'entier naturel n.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0.85u_n + 300 - u_n = -0.15u_n + 300$.
   D' après la question précédente, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2000$ alors par produit par $-0,15 < 0$, on a $-0,15u_n < -0,15 \times 2000$, soit : $-0,15u_n < -300$ et en ajoutant 300 à chaque membre :

$$-0,15u_n + 300 < -300 + 300, \text{ ce qui donne } -0,15u_n + 300 < 0$$

   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -0.15u_n + 300 < 0$, la suite (u_n) est donc strictement décroissante.
   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2 000, elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 2000$.
3. (a) Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 2000 = 12000 - 2000 = 10000$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2000 = 0,85u_n + 300 - 20000 = 0,85u_n - 1700 = 0,85\left(u_n - \frac{1700}{0,85}\right) = 0,85(u_n - 2000) = 0,85v_n$$

L'égalité $v_{n+1} = 0,85v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,85$.

(c) le résultat précédent, on sait que que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,85^n = 10000 \times 0,85^n$.
Or $v_n = u_n - 2000 \iff u_n = v_n + 2000 = 10000 \times 0,85^n + 2000$.

(d) Comme $0 < 0,85 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2000 \times 0,85^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2000$ (par somme de limites).

4. u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 2 000 soit moins d'un quart de la population initiale : le responsable a raison.