

Correction

1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a
B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), E(0; 0; 1), G(1; 1; 1), H(0; 1; 1).
2. a. Les segments [EG], [ED] et [GD] sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles de côté 1, donc EG = ED = GD = $\sqrt{2}$: le triangle EGD est donc équilatéral.
- b. L'aire a du triangle EGD est donnée par $a = \frac{\sqrt{3}}{4} \times c^2$ avec $c = \sqrt{2}$, donc $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées du point M. On a alors $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$, se traduit par :

$$\begin{cases} x-1 = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Le point M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

4. a. On a $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0$. Donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{EG}$.

$$\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 \times (-1) + 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0. \text{ On a aussi } \vec{n} \perp \overrightarrow{ED}$$

Le vecteur \vec{n} est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires \overrightarrow{EG} et \overrightarrow{ED} du plan (EGD) : c'est donc un vecteur normal à ce plan.

- b. Le plan (EGD) est l'ensemble des points P $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = 0$. On a $\overrightarrow{EP} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Donc :

$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = 0 \iff -(x+1) + y + z = 0 \iff -x + y + z - 1 = 0$$

Une équation du plan (EGD) est donnée par : $-x + y + z - 1 = 0$.

- c. La droite \mathcal{D} est orthogonale au plan (EGD) donc le vecteur \vec{n} est un vecteur directeur de \mathcal{D} , de plus \mathcal{D} passe par le point M $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Donc une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} est donnée par :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

La suite du corrigé est dans la page 2

5. a. La droite \mathcal{D} contient le point M et est perpendiculaire au plan (EGD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue du sommet M. Le pied de cette hauteur K est l'intersection de la droite \mathcal{D} et du plan (EGD); ses coordonnées vérifient donc les équations :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \\ -x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x,y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient

$$-\left(\frac{2}{3} - t\right) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 1 = 0 \iff 3t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{3} \text{ Ce qui donne } \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Finalement : K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

- b. On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KM} \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

$$D'où $KM = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = h$.$$

Comme l'aire a du triangle (EGD) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$, le volume de la pyramide GEDM est :

$$V = \frac{a \times h}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{1}{6}$$