Correction

1. • $u_1 = \dfrac{21+3}{2} = 12$;
   • $v_1 = \dfrac{21+3\times 3}{4} = \dfrac{15}{2}$.
2. (a) On a quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
   $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} - \dfrac{u_n+3v_n}{4} = \dfrac{2u_n+2v_n-u_n-3v_n}{4} = \dfrac{u_n-v_n}{4} = \dfrac{w_n}{4}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $w_{n+1} = \dfrac{1}{4}w_n$ montre que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 21 - 3 = 18$.
   On sait qu'alors pour tout naturel n, $w_n = 18 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
   (b) Comme $\dfrac{1}{4} > 0 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^n > 0$ et $18 > 0$, donc la suite (w_n) est une suite de nombres positifs.
   D'autre part $0 < \dfrac{1}{4} < 1$ entraine que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
3. (a) Pour tout entier naturel n, on a :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{u_n+v_n-2u_n}{2} = \frac{-u_n+v_n}{2} = -\frac{1}{2}(u_n-v_n) = -\frac{1}{2}w_n$$
   (b) On a vu à la question 2. b. que $w_n > 0$, quel que soit l'entier naturel n, donc $-\dfrac{1}{2}w_n < 0$ et par conséquent :
   $u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.
   On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 3$.
   (c) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 3$.
   - **Initialisation** : On a $u_0 = 21 \geqslant 3$: la proposition est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité** : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3$, on a aussi, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 3$.
     On ajoute membre à membre ces deux inégalité on obtient : $u_n + v_n \geqslant 6$ d' où en divisant par le nombre positif 2 les deux membres de cet inégalité : $\dfrac{u_n+v_n}{2} \geqslant 3$ et finalement $u_{n+1} \geqslant 3$.
   - **Conclusion** : la minoration par 3 est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence on a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3$.

   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 3 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 3$.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. (a) On a vu à la question 2.b. que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ ou encore que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.
   Les deux suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et donc que $\ell = \ell'$.
   (b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = u_n + 2v_n$. On a donc Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$c_{n+1} = u_{n+1} + 2v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} + 2\frac{u_n+3v_n}{4} = \frac{u_n+v_n}{2} + \frac{u_n+3v_n}{2} = \frac{2u_n+4v_n}{2} = u_n + 2v_n = c_n$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n$. Donc la suite (c_n) est constante.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = c_0 = u_0 + 2v_0 = 21 + 2\times 3 = 27$.
   (c) Comme $c_n = u_n + 2v_n$ et que (u_n) et (v_n) ont même limite ℓ, on a donc :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 27 = 27 = \ell + 2\ell = 3\ell$.
   $3\ell = 27$ donc $\ell = \dfrac{27}{3} = 9$. Les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 9.