Exercice 4

On considére les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 21 \quad ; \quad v_0 = 3\,;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1 et v_1.
2. On considére la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.
   (b) Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{2}w_n$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 3$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 3$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. (a) Démontrer que $\ell = \ell'$.
   (b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = u_n + 2v_n$.
   Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à -dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 27$.
   (c) Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.