Exercice 4

On considére les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 21 \quad ; \quad v_0 = 3\,;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1 et v_1.
2. On considére la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.
   (b) Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{2}w_n$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 3$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 3$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. (a) Démontrer que $\ell = \ell'$.
   (b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = u_n + 2v_n$.
   Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à -dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 27$.
   (c) Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.

Solution

1. • $u_1 = \dfrac{21+3}{2} = 12\,;$
   • $v_1 = \dfrac{21 + 3\times 3}{4} = \dfrac{15}{2}$.
2. (a) On a quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
   $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = \dfrac{2u_n + 2v_n - u_n - 3v_n}{4} = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{w_n}{4}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $w_{n+1} = \dfrac{1}{4}w_n$ montre que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 21 - 3 = 18$.
   On sait qu'alors pour tout naturel n, $w_n = 18 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
   (b) Comme $\dfrac{1}{4} > 0 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^n > 0$ et $18 > 0$, donc la suite (w_n) est une suite de nombres positifs.
   D'autre part $0 < \dfrac{1}{4} < 1$ entraine que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.
3. (a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{-u_n + v_n}{2} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n) = -\frac{1}{2}w_n$$

(b) On a vu à la question 2. b. que $w_n > 0$, quel que soit l'entier naturel n, donc $-\frac{1}{2}w_n < 0$ et par conséquent :

$u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 3$.

(c) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 3$.

- **Initialisation** : On a $u_0 = 21 \geqslant 3$: la proposition est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité** : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3$, on a aussi, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 3$.
  On ajoute membre à membre ces deux inégalité on obtient : $u_n + v_n \geqslant 6$ d' où en divisant par le nombre positif 2 les deux membres de cet inégalité : $\frac{u_n + v_n}{2} \geqslant 3$ et finalement $u_{n+1} \geqslant 3$.
- **Conclusion** : la minoration par 3 est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence on a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 3 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 3$.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. (a) On a vu à la question 2.b. que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ ou encore que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

   Les deux suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et donc que $\ell = \ell'$.

   (b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = u_n + 2v_n$. On a donc Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_{n+1} = u_{n+1} + 2v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} + 2\frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + 3v_n}{2} = \frac{2u_n + 4v_n}{2} = u_n + 2v_n = c_n$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n$. Donc la suite (c_n) est constante.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = c_0 = u_0 + 2v_0 = 21 + 2 \times 3 = 27$.

   (c) Comme $c_n = u_n + 2v_n$ et que (u_n) et (v_n) ont même limite ℓ, on a donc :

   $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 27 = 27 = \ell + 2\ell = 3\ell$.

   $3\ell = 27$ donc $\ell = \frac{27}{3} = 9$. Les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 9.