

Correction

Partie I

1. On a $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4} \times 8 \vec{i} = 6 \vec{i}$ donc le point P a pour coordonnées (6; 0; 0) et $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4} \times 8 \vec{k}$, donc le point Q a pour coordonnées Q(0; 0; 6).

2. Concéderons les deux vecteurs $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ du plan (PQR).

• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = -6 + 0 + 6 = 0$: donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{PQ}$.

• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 2 - 10 + 8 = 0$: donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{PR}$.

Le vecteur \vec{n} orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR) est normal à ce plan.

3. Le vecteur \vec{n} est normal au plan (PQR) par conséquent une équation de ce plan est donnée par :

$$1x - 5y + 1z + d = 0 \quad \text{où } d \text{ est un réel fixé}$$

De plus le plan (PQR) passe par le point P(6; 0; 0), les coordonnées de P vérifient l'équation de (PQR) :

$$1 \times 6 - 5 \times 0 + 1 \times 0 + d = 0 \iff d = -6$$

Finalement une équation cartésienne de (PQR) est : $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

1. • Les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles, donc les droites (AC) et (EG) sont parallèles;

• Les droites (AE) et (CG) sont perpendiculaires au plan (ABCD), elles sont donc parallèles.

Le quadrilatère (AEGC) ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme; ses diagonales [AG] et [CE] ont se coupent en leur milieu Ω .

Or G(8; 8; 8), donc les coordonnées de Ω sont donc $\left(\frac{0+8}{2}; \frac{0+8}{2}; \frac{0+8}{2}\right) = (4; 4; 4)$.

2. La droite (d) est dirigée par le vecteur \vec{n} et contient le point Ω , donc une représentation paramétrique de (d) est donnée par :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 - 5t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. L est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR) donc la droite (ΩL) est perpendiculaire au plan (PQR), c'est donc la droite (d).

L est donc le point commun au plan (PQR) et à la droite (d), ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 - 5t \\ z = 4 + t \\ x - 5y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

On remplace x,y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$$4 + t - 5(4 - 5t) + 4 + t - 6 = 0 \iff 27t = 18 \iff t = \frac{2}{3}$$

En reportant cette valeur de t dans les trois premières équations du système, on trouve $L\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

4. la distance du point Ω au plan (PQR), est donnée par la norme du vecteur $\overrightarrow{\Omega L}$.

$$\|\overrightarrow{\Omega L}\| = \sqrt{\left(4 - \frac{14}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{14}{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$