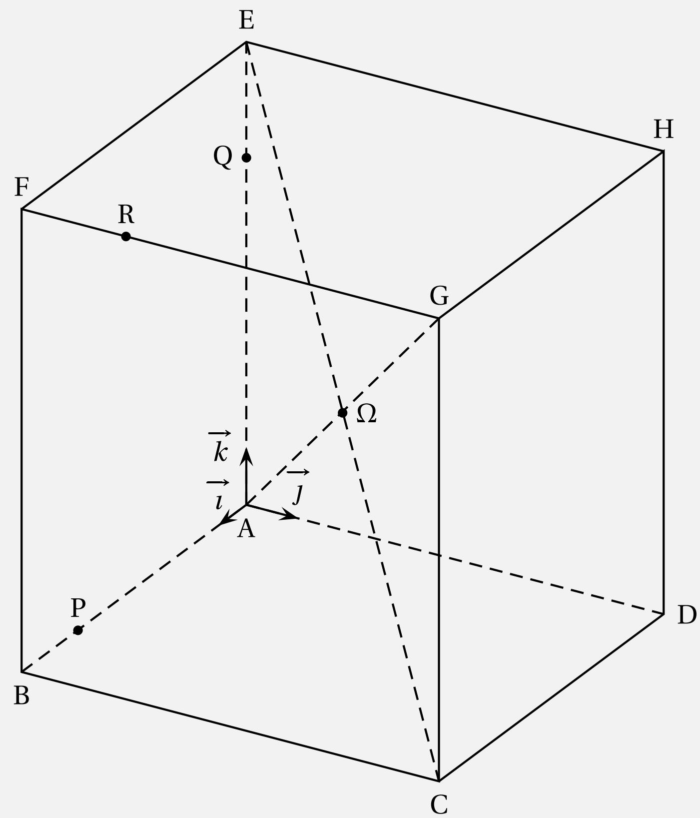
Exercice 5

On considère un cube ABCDEFGH d'arète 8 cm et de centre Ω.
Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8\,;2\,;8)$.
   Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,-5\,;\,1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x-5y+z-6=0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4\,;4\,;4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

Correction

Partie I

1. On a $\overrightarrow{AP} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{4} \times 8\,\vec{\imath} = 6\,\vec{\imath}$ donc le point P a pour coordonnées $(6;0;0)$ et $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{4} \times 8\,\vec{k}$, donc le point Q a pour coordonnées $Q(0;0;6)$.
2. Concéderons les deux vecteurs $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}$ du plan (PQR).
   - $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = -6+0+6 = 0$:donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{PQ}$.
   - $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 2-10+8 = 0$: donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{PR}$.

   Le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR) est normal à ce plan.
3. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (PQR) par conséquent une équation de ce plan est donnée par :
$$1x - 5y + 1z + d = 0 \quad \text{où d est un réel fixé}$$
   De plus le plan (PQR) passe par le point $P(6;0;0)$, les coordonnées de P vérifient l'équation de (PQR) :
$$1\times 6 - 5\times 0 + 1\times 0 + d = 0 \iff d = -6$$
   Finalement une équation cartésienne de (PQR) est : $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

1. • Les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles, donc les droites (AC) et (EG) sont parallèles;
   • Les droites (AE) et (CG) sont perpendiculaires au plan (ABCD) , elles sont donc parallèles.
   Le quadrilatère (AEGC) ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme; ses diagonales [AG] et [CE] ont se coupent en leur milieu Ω.
   Or $G(8;8;8)$, donc les coordonnées de Ω sont donc $\left(\dfrac{0+8}{2}\,;\,\dfrac{0+8}{2}\,;\,\dfrac{0+8}{2}\right) = (4\,;\,4\,;\,4)$.
2. La droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{n}$ et contient le point Ω, donc une représentation paramétrique de (d) est donnée par :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t \\ y &=& 4-5t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z &=& 4+t \end{array}\right.$$
3. L est le le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR) donc la droite (ΩL) est perpendiculaire au plan (PQR), c'est donc la droite (d).
   L est donc le point commun au plan (PQR) et à la droite (d), ses coordonnées vérifient donc le système :
$$\left\{\begin{array}{l} x = 4+t \\ y = 4-5t \\ z = 4+t \\ x-5y+z-6=0 \end{array}\right.$$
   On remplace x,y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :
$$4+t-5(4-5t)+4+t-6=0 \iff 27t = 18 \iff t = \frac{2}{3}$$
   En reportant cette valeur de t dans les trois premières équations du système, on trouve $L(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, \frac{14}{3})$.
4. la distance du point Ω au plan (PQR), est donnée par la norme du vecteur $\overrightarrow{\Omega L}$.
$$\|\overrightarrow{\Omega L}\| = \sqrt{\left(4-\frac{14}{3}\right)^2 + \left(4-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(4-\frac{14}{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
   .