

## Correction

1. Pour  $n = 0$ ,  $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}}{1+\frac{5}{2}} = \frac{5}{6}$ .
2. On admet que la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $\left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$ .
  - (a) On veut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2.$$

- **Initialisation** : on a  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_1 = \frac{5}{6}$ ; de plus  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{5}{6} \leq 2$ , donc :

$\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$  : l'encadrement est vrai au rang 0;

- **Hérédité** : on suppose que pour  $n \geq 0$ ,  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ .

La fonction  $f$  étant croissante les images des quatre nombres ci-dessus sont rangées dans le même ordre, soit :  $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$ .

Or on a vu que  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$  et on a  $f(2) = \frac{10}{1+9} = \frac{10}{9}$ ;

de plus  $f(u_n) = u_{n+1}$  et  $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$  donc  $\frac{5}{6} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{10}{9}$ .

Or  $\frac{1}{2} < \frac{5}{6}$  et  $\frac{10}{9} < 2$ ; on a donc finalement :

$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$  : l'encadrement est donc vrai au rang  $n + 1$ .

- **Conclusion** : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang  $n \geq 0$ , il est vrai au rang  $n + 1$  : par le principe de récurrence pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ .

- (b) La suite  $(u_n)$  est croissante et elle majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite  $\ell$  telle que :  $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 2$ .

- (c) La fonction  $f$  est continue car dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  donc la limite  $\ell$  vérifie l'égalité  $f(\ell) = \ell$ ; on résout cette équation :

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{5\ell}{1+4\ell} = \ell \iff 5\ell = \ell(1+4\ell) \iff 0 = \ell(1+4\ell-5)$$

$$\iff \ell(3\ell-4) = 0 \iff 4\ell(\ell-1) = 0 \iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ell-1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ell = 1 \end{cases}$$

Comme  $\ell \geq \frac{1}{2}$ , la seule solution possible est 1; la suite  $(u_n)$  converge vers 1.

3. (a) On complète la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif  $E$ , détermine la plus petite valeur  $P$  tel que :  $1 - u_P < E$  :

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while 1 - u < E :
        u = 5u / (1 + 4u)
        n = n + 1
    return n
```

- (b) On obtient  $u_7 \approx 0,999936$ , donc  $1 - u_7 < 10^{-4}$ . Le programme renvoie  $n = 7$ .

4. On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

(a) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$  soit en utilisant la définition de  $u_{n+1}$  :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{5u_n}{1+4u_n}}{1 - \frac{5u_n}{1+4u_n}} \text{ soit en multipliant chaque terme par } 1+4u_n :$$

$$v_{n+1} = \frac{5u_n}{1+4u_n-5u_n} = \frac{5u_n}{1-u_n} = 5 \frac{u_n}{1-u_n} = 5v_n.$$

L'égalité, vraie pour tout naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 5v_n$  montre que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 5, de

$$\text{premier terme } v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

On sait qu'alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = 1 \times 5^n = 5^n$ .

(b) Quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \iff v_n(1-u_n) = u_n \iff v_n - u_n v_n = u_n \iff v_n = u_n v_n + u_n \iff v_n = u_n(v_n + 1)$ .

Comme  $v_n = 5^n$ ,  $v_n \geq 1$ , donc  $v_n + 1 \geq 2$ , donc  $v_n + 1 \neq 0$  et finalement en multipliant par  $\frac{1}{v_n + 1}$ , on obtient  $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

(c) On sait que quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = 5^n$ , d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :

$$u_n = \frac{5^n}{5^n + 1} \text{ et en multipliant par } \frac{1}{5^n} :$$

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{5^n}}. \text{ Or } \frac{1}{5^n} = \frac{1^n}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0,2^n, \text{ d'où } u_n = \frac{1}{1 + 0,2^n}.$$

Comme  $0 < 0,2 < 1$ , on peut dire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1+0} = 1$ .