

**Exercice 5**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $\left] -\frac{1}{4} ; +\infty \right[$  par :

$$f(x) = \frac{5x}{1+4x}$$

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = \frac{1}{2}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Calculer  $u_1$ .
2. On admet que la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $\left] -\frac{1}{4} ; +\infty \right[$ .
  - (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ .
  - (b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
  - (c) On appelle  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$ . Déterminer la valeur de  $\ell$ .
3. (a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif  $E$ , détermine la plus petite valeur  $P$  tel que :  $1 - u_P < E$ .

```
def seuil(E) :  
    u = 0,5  
    n = 0  
    while .....  
        u = .....  
        n = n + 1  
    return n
```

- (b) Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où  $E = 10^{-4}$ .
4. On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

- (a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 5.  
En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- (b) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$ .
- (c) Montrer alors que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0,2^n}$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite  $(u_n)$ .