Exercice 5

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{5x}{1+4x}$$

On considére la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 .
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.
3. (a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while ..........................
        u = ..........................
        n = n + 1
    return n
```

   (b) Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.
4. On considére la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 5.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n+1}$.
   (c) Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1+0,2^n}.$$

   Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

Solution

1. Pour $n = 0$, $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}}{1+2} = \frac{5}{6}$.
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$.
   (a) On veut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

   - **Initialisation** : on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{5}{6}$; de plus $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{5}{6} \leqslant 2$, donc :

$\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;

- **Hérédité** : on suppose que pour $n \geqslant 0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
  La fonction f étant croissante les images des quatre nombres ci-dessus sont rangées dans le même ordre, soit : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$.
  Or on a vu que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{6}$ et on a $f(2) = \dfrac{10}{1+9} = \dfrac{10}{9}$;
  de plus $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $\dfrac{5}{6} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{10}{9}$.
  Or $\dfrac{1}{2} < \dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{10}{9} < 2$; on a donc finalement :
  $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$: l'encadrement est donc vrai au rang $n+1$.
- **Conclusion** : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \geqslant 0$, il est vrai au rang $n+1$: par le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

(b) La suite (u_n) est croissante et elle majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que : $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 2$.

(c) La fonction f est continue car dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc la limite ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$; on résout cette équation :

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{5\ell}{1+4\ell} = \ell \iff 5\ell = \ell(1+4\ell) \iff 0 = \ell(1+4\ell-5)$$

$$\iff \ell(3\ell-4) = 0 \iff 4\ell(\ell-1) = 0 \iff \left[\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell & = & 1 \end{array}\right.$$

Comme $\ell \geqslant \dfrac{1}{2}$, la seule solution possible est 1 ; la suite (u_n) converge vers 1.

3. (a) On complète la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$:

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while 1 - u < E :
        u = 5u / (1 + 4u)
        n = n + 1
    return n
```

(b) On obtient $u_7 \approx 0{,}999\,936$, donc $1 - u_7 < 10^{-4}$. Le programme renvoie $n = 7$.

4. On considére la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

(a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$ soit en utilisant la définition de u_{n+1} :

$v_{n+1} = \dfrac{\frac{5u_n}{1+4u_n}}{1 - \frac{5u_n}{1+4u_n}}$ soit en multipliant chaque terme par $1+4u_n$:

$v_{n+1} = \dfrac{5u_n}{1+4u_n-5u_n} = \dfrac{5u_n}{1-u_n} = 5\dfrac{u_n}{1-u_n} = 5v_n$.

L'égalité, vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 5v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 5, de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

On sait qu'alors , pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times 5^n = 5^n$.

(b) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \iff v_n(1-u_n) = u_n \iff v_n - u_n v_n = u_n \iff v_n = u_n v_n + u_n \iff v_n = u_n(v_n+1)$.

Comme $v_n = 5^n, v_n \geqslant 1$, donc $v_n + 1 \geqslant 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$ et finalement en multipliant par $\dfrac{1}{v_n+1}$, on obtient $u_n = \dfrac{v_n}{v_n+1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(c) On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5^n$, d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :

$u_n = \dfrac{5^n}{5^n+1}$ et en multipliant par $\dfrac{1}{5^n}$:

$u_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{5^n}}$. Or $\dfrac{1}{5^n} = \dfrac{1^n}{5^n} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0,2^n$, d'où $u_n = \dfrac{1}{1+0,2^n}$.

Comme $0 < 0,2 < 1$, on peut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1+0} = 1$.