Correction

1. (a) Retrancher 1 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{1}{100} = 1 - 0,01 = 0,99$.
   D'une année sur l'autre on multiplie le nombre de panneaux par 0,99 puis on augment de nombre de panneaux de 150.

   (b) Avec la calculatrice il suffit de taper 10 500 Entrée puis $\times 0,99 + 150$.
   Entrée donne $u_1 = 10545$, les appuis successifs de Entrée donnent u_2, u_3, etc.
   On obtient $u_{41} \approx 12019$.
   le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de 41 ans soit en 2062.

   (c) On compléte le programme en Python ci-dessous qui stocke la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n > 12000$.

```
u = 10500
n= 0
while u ⩽ 12000 :
    u = 0,99 * u + 150
    n = n + 1
```

2. On veut montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1500$.
   - **Initialisation** : $u_0 = 10500 \leqslant 15000$: la proposition est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 15000$ soit en multipliant par 0,99 :
     $0,99u_n \leqslant 0,99 \times 15000$ et en ajoutant 150 à chaque membre :
     $0,99u_n + 150 \leqslant 0,99 \times 15000 + 150$ ou $u_{n+1} \leqslant 14850 + 150$ et finalement $u_{n+1} \leqslant 15000$: la proposition est vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion** : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de la récurrence la proposition $u_n \leqslant 15000$ est vraie pur tout naturel $n \in \mathbb{N}$.

3. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,99u_n + 150 - u_n = 150 - 0,01u_n$.
   Or d'après le résultat précédent :
   $u_n \leqslant 15000 \Rightarrow 0,01u_n \leqslant 0,01 \times 15000$ ou encore $0,01u_n \leqslant 150$ ou en ajoutant à chaque membre $-0,02u_n$:
   $0 \leqslant 150 - 0,02u_n$; on a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 15 000 : elle est donc convergente vers une limite ℓ, telle que $\ell \leqslant 15000$.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 15000 = 0,99u_n + 150 - 15000$, soit

$$v_{n+1} = 0,99u_n - 14850 = 0,99\left(u_n - \frac{14850}{0.99}\right) = 0,99(u_n - 15000)$$

   Mais, $u_n - 15000 = v_n$, on obtient alors $v_{n+1} = 0,99v_n$: cette relation vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,99 de premier terme $v_0 = u_0 - 15000 = 10500 - 15000 = -4500$.

   (b) On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,99^n$, soit $v_n = -4500 \times 0,99^n$.

   (c) Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 15000$, Soit : $u_n = v_n + 15000 = 15000 - 4500 \times 0,99^n$.

   (d) Comme $0 < 0,99 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,99^n = 0$, donc
   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 15000$
   Au bout d'un temps suffisamment long, le nombre de panneaux sera égal à 15000.