Exercice 6

Au 1er janvier 2021, la centrale solaire de Photovoltaic possédait 10 500 panneaux solaires.

On observe, chaque année, que 1 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 150 nouveaux panneaux solaires sont installés.

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,500$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,99u_n + 150$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2021 + n$.

1. (a) Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

   (b) On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.

   À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce probléme.

   (c) Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10500
n= 0
while ...... :
    u = ......
    n = ......
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 15\,000$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.
5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 15\,000$, pour tout entier naturel n.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,99 dont on précisera le premier terme.

   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

   Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Solution

1. (a) Retrancher 1 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{1}{100} = 1 - 0,01 = 0,99$.

   D'une année sur l'autre on multiplie le nombre de panneaux par 0,99 puis on augment de nombre de panneaux de 150.

   (b) Avec la calculatrice il suffit de taper 10 500 Entrée puis $\times 0,99 + 150$.

   Entrée donne $u_1 = 10\,545$, les appuis successifs de Entrée donnent u_2, u_3, etc.

   On obtient $u_{41} \approx 12\,019$.

   le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de 41 ans soit en 2062.

   (c) On compléte le programme en Python ci-dessous qui stocke la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n > 12000$.

```
u = 10500
n= 0
while u <= 12000 :
    u = 0,99 * u + 150
    n = n + 1
```

2. On veut montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leqslant 1500$.

   - **Initialisation** : $u_0 = 10\,500 \leqslant 15\,000$: la proposition est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 15\,000$ soit en multipliant par 0,99 :

     $0,99u_n \leqslant 0,99 \times 15\,000$ et en ajoutant 150 à chaque membre :

$0,99u_n + 150 \leqslant 0,99 \times 15\,000 + 150$ ou $u_{n+1} \leqslant 14850 + 150$ et finalement $u_{n+1} \leqslant 15\,000$: la proposition est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion** : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de la récurrence la proposition $u_n \leqslant 15\,000$ est vraie pur tout naturel $n \in \mathbb{N}$.

3. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - u_n = 0,99u_n + 150 - u_n = 150 - 0,01u_n$.
   Or d'après le résultat précédent :
   $u_n \leqslant 15\,000 \Rightarrow 0,01u_n \leqslant 0,01 \times 15\,000$ ou encore $0,01u_n \leqslant 150$ ou en ajoutant à chaque membre $-0,02u_n$:
   $0 \leqslant 150 - 0,02u_n$; on a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.
4. La suite (u_n) est croissante et majorée par $15\,000$: elle est donc convergente vers une limite ℓ, telle que $\ell \leqslant 15\,000$.
5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = u_{n+1} - 15\,000 = 0,99u_n + 150 - 15\,000$, soit

$$v_{n+1} = 0,99u_n - 14850 = 0,99\left(u_n - \frac{14850}{0.99}\right) = 0,99(u_n - 15000)$$

   Mais, $u_n - 15000 = v_n$, on obtient alors $v_{n+1} = 0,99v_n$: cette relation vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,99$ de premier terme $v_0 = u_0 - 15\,000 = 10\,500 - 15\,000 = -4\,500$.

   (b) On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0 \times 0,99^n$, soit $v_n = -4\,500 \times 0,99^n$.

   (c) Pour tout entier naturel $n, v_n = u_n - 15\,000$, Soit : $u_n = v_n + 15\,000 = 15\,000 - 4\,500 \times 0,99^n$.

   (d) Comme $0 < 0,99 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,99^n = 0$, donc
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 15\,000$
   Au bout d'un temps suffisamment long, le nombre de panneaux sera égal à 15000.