Correction

1. Pour $n=0$, $u_1=u_{0+1}=\dfrac{2}{5}u_0+\dfrac{3}{5}\times 0+1=\dfrac{2}{5}\times 1+1=\dfrac{7}{5}$.

   Pour $n=1$, $u_1=u_{1+1}=\dfrac{2}{5}u_1+\dfrac{3}{5}\times 1+1=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{7}{5}+\dfrac{3}{5}+1=\dfrac{54}{25}$.

2. (a) La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :

   = 2/5 * B2 + 3/5 * A2 +1

   (b) La suite (u_n) semble croissante.

3. (a) On veut montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad n\leqslant u_n\leqslant n+1$.

   - **Initialisation**
     Pour $n=0$, $u_0=1$ et $0\leqslant 1\leqslant 1$ donc la proposition est vraie au rang 0.
   - **Hérédité**
     Soit n $\in\mathbb{N}$, tel que $n\leqslant u_n\leqslant n+1$, on a alors

     $$\begin{aligned} n\leqslant u_n\leqslant n+1 &\iff \frac{3}{5}n\leqslant\frac{3}{5}u_n\leqslant\frac{3}{5}(n+1)\\ &\iff \frac{3}{5}n+\frac{2}{5}n\leqslant\frac{3}{5}u_n+\frac{2}{5}n\leqslant\frac{3}{5}(n+1)+\frac{2}{5}n\\ &\iff n\leqslant\frac{3}{5}u_n+\frac{2}{5}n\leqslant n+\frac{3}{5}\\ &\iff n+1\leqslant\frac{3}{5}u_n+\frac{2}{5}n+1\leqslant n+\frac{3}{5}+1 \iff n+1\leqslant u_{n+1}\leqslant n+\frac{8}{5}\end{aligned}$$

     Mais $n+\dfrac{8}{5}\leqslant n+2$, donc $n+1\leqslant u_{n+1}\leqslant n+2$: la proposition est vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion**
     La proposition est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n\geqslant 0$; d'aprés le principe de récurrence, la proposition $n\leqslant u_n\leqslant n+1$ est vraie pour tout $n\geqslant 0$.

   (b) D'après la question précédente :

   - Pour tout n, $n\leqslant u_n\leqslant n+1$ donc $n+1\leqslant u_{n+1}\leqslant n+2$, on peut écrire donc, $n\leqslant u_n\leqslant n+1\leqslant u_{n+1}\leqslant n+2$, en on déduit que $u_n\leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
   - Pour tout n, $u_n\geqslant n$; or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

   (c) Pour tout n, $n\leqslant u_n\leqslant n+1$ donc pour tout $n>0$, on a : $1\leqslant\dfrac{u_n}{n}\leqslant\dfrac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1\leqslant\dfrac{u_n}{n}\leqslant 1+\dfrac{1}{n}$.

   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}=1$

   Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-n$

   (a) Pour tout n, $v_n=u_n-n$ donc $u_n=v_n+n$.

   $v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)=\dfrac{2}{5}u_n+\dfrac{3}{5}n+1-n-1=\dfrac{2}{5}(v_n+n)-\dfrac{2}{5}n=\dfrac{2}{5}v_n+\dfrac{2}{5}n-\dfrac{2}{5}n=\dfrac{2}{5}v_n$, et $v_0=u_0-0=1$.

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $v_0=1$.

   (b) On en déduit que, pour tout n, $v_n=v_0\times q^n=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

   Comme $u_n=v_n+n$, on a $u_n=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+n$.