

Exercice 7

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,4
4	2	2,16
5	3	3,064
6	4	4,025 6

2. (a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B?
 (b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.
 (b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .
 (c) Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - n$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
 (b) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n + n$.