**Exercice 7**

La suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, $u_1$ et $u_2$ sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite $(u_n)$.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $u_n$ |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1,4 |
| 4 | 2 | 2,16 |
| 5 | 3 | 3,064 |
| 6 | 4 | 4,025 6 |

2. (a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de $(u_n)$ dans la colonne B ?
   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)$.
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
   (b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)$.
   (c) Démontrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$
4. On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$,on a : $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n + n$.

Solution

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \frac{2}{5}u_0 + \frac{3}{5} \times 0 + 1 = \frac{2}{5} \times 1 + 1 = \frac{7}{5}$.
   Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \frac{2}{5}u_1 + \frac{3}{5} \times 1 + 1 = \frac{2}{5} \times \frac{7}{5} + \frac{3}{5} + 1 = \frac{54}{25}$.
2. (a) La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de $(u_n)$ dans la colonne B est :

   = 2/5 * B2 + 3/5 * A2 +1

   (b) La suite $(u_n)$ semble croissante.
3. (a) On veut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc la proposition est vraie au rang 0.
   - **Hérédité**
     Soit n $\in \mathbb{N}$, tel que $n \leqslant u_n \leqslant n+1$, on a alors
     $$\begin{aligned} n \leqslant u_n \leqslant n+1 &\iff \frac{3}{5}n \leqslant \frac{3}{5}u_n \leqslant \frac{3}{5}(n+1) \\ &\iff \frac{3}{5}n + \frac{2}{5}n \leqslant \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}n \leqslant \frac{3}{5}(n+1) + \frac{2}{5}n \end{aligned}$$

$$\iff n \leqslant \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}n \leqslant n + \frac{3}{5}$$
$$\iff n+1 \leqslant \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{5} + 1 \iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{8}{5}$$

Mais $n + \frac{8}{5} \leqslant n+2$, donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ : la proposition est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**
  La proposition est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$ ; d'aprés le principe de récurrence, la proposition $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

(b) D'après la question précédente :

- Pour tout $n$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$, on peut écrire donc, $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$, en on déduit que $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite $(u_n)$ est croissante.
- Pour tout $n$, $u_n \geqslant n$ ; or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

(c) Pour tout $n$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

(a) Pour tout $n$, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{5}(v_n + n) - \frac{2}{5}n = \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}n - \frac{2}{5}n = \frac{2}{5}v_n$, et $v_0 = u_0 - 0 = 1$.

Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

(b) On en déduit que, pour tout $n$, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n + n$.