Correction

1.
   - 2022 correspond à $n = 1$, donc $u_1 = 0,8u_0 \times (1-0,1 \times u_0) = 0,8 \times 0,7 \times (1-0,1 \times 0,7) = 0,56 \times (1-0,07) = 0,56 \times 0,93 = 0,5208$ soit environ 520 individus.
   - 2023 correspond à $n = 2$, donc $u_2 = 0,8u_1 \times (1-0,1u_1) = 0,8 \times 0,5208 \times (1-0,1 \times 0,5208) = 0,41664 \times (1-0,05208) = 0,41664 \times 0,94792 \approx 0,3949$ soit environ 395 individus.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = 0,8x(1-0,1x) = 0,8x - 0,08x^2$$

f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0,1]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 0,8 - 2 \times 0,08x = 0,8 - 0,16x$$

Or, $\quad 0,8 - 0,16x > 0 \quad \iff \quad -0,16x > -0,8 \quad \iff \quad x < \dfrac{0.8}{0.16} = 5.$
Par conséquent $f'(x) > 0$ sur $[0,1]$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0,1]$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	0.72

3. L'équation $f(x) = x$, s'écrit : $0,8x - 0,08x^2 = x$, ce qui donne $-0,2x - 0,08x^2 = 0$ ou encore $x(0,2+0,08x) = 0$.
Donc soit $x = 0$ ou $0,2 + 0,08x = 0$, finalement : $x = 0$ ou $x = -\frac{0,2}{0,08} = -2,5$.
Mais $-2,5 \notin [0,1]$, alors l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[0,1]$ est 0.
On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. (a) On veut par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   - **Initialisation** : on a $0 \leqslant 0,5208 \leqslant 0,7 \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$: la relation est vraie au rang 0 ;
   - **Hérédité** : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :
     $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$; la fonction f étant croissante sur $[0,1]$, on a donc : $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$,
     soit puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,8 \times (1-0,1) = 0,72 \leqslant 1$:
     $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion :** la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n entier naturel quelconque, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :
     Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

   (b) La suite (u_n) est la question précédente décroissante et minorée par 0 ; elle est donc est convergente vers une limite ℓ telle que $0 \leq \ell \leq 1$.

   (c) La fonction f est continue sur $[0,1]$ (car c'est une fonction polynôme). ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$, dont on a vu à la question **3.** qu'elle n'avait que 0 comme solution sur l'intervalle $[0,1]$. On conclut que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = 0$.

5. (a) L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroit, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

   (b) Le biologiste considère que l'espèce sera menacée si le nombre d'individus devient inférieur ou égal à 30. Son algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont strictement supérieurs à 0,03.
   Il s'arrête à $n = 13$ car $u_{13} \approx 0,028$
   L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2034.