

Exercice 8

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île.

Au début de l'année 2021, cette population comptait 700 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,7 \\ u_{n+1} &= 0,8u_n(1-0,1u_n) \end{cases}$$

Où pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année 2021 + n .

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2022 puis au début de l'année 2023.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 0,9x(1 - 0,1x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
(c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .
5. Le biologiste a l'intuition que sera tôt ou tard menacée d'extinction.
(a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
(b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace() :  
    u = 0,7  
    n = 0  
    while u > 0,03 :  
        u = 0,8*u*(1-0,1*u)  
        n = n+1  
    return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.