Exercice 8

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île.
Au début de l'année 2021, cette population comptait 700 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0{,}7 \\ u_{n+1} & = & 0{,}8u_n(1-0{,}1u_n) \end{cases}$$

Où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2021+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2022 puis au début de l'année 2023.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 0{,}9x(1-0{,}1x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
5. Le biologiste a l'intuition que sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   (a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   (b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace() :
  u = 0,7
  n = 0
  while u > 0,03 :
       u = 0,8*u*(1-0,1*u)
       n = n+1
  return n
```

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution

1.
   - 2022 correspond à $n = 1$, donc $u_1 = 0{,}8u_0 \times (1-0,1\times u_0) = 0,8\times 0,7\times(1-0,1\times 0,7) = 0,56\times(1-0,07) = 0,56\times 0,93 = 0{,}5208$ soit environ 520 individus.
   - 2023 correspond à $n = 2$, donc $u_2 = 0{,}8u_1 \times (1-0{,}1u_1) = 0{,}8\times 0{,}5208\times(1-0{,}1\times 0{,}5208) = 0{,}41664\times(1-0{,}05208) = 0{,}41664\times 0{,}94792 \approx 0{,}3949$ soit environ 395 individus.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = 0{,}8x(1-0{,}1x) = 0{,}8x - 0{,}08x^2$$

   f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0,1]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 0{,}8 - 2\times 0{,}08x = 0{,}8 - 0{,}16x$$

Or, $\quad 0{,}8-0{,}16x>0 \iff -0{,}16x>-0{,}8 \iff x<\dfrac{0.8}{0.16}=5.$

Par conséquent $f'(x)>0$ sur $[0,1]$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0,1]$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	0.72

3. L'équation $f(x)=x$, s'écrit : $0{,}8x-0{,}08x^2=x$, ce qui donne $-0{,}2x-0{,}08x^2=0$ ou encore $x(0{,}2+0{,}08x)=0$.
   Donc soit $x=0$ ou $0{,}2+0{,}08x=0$, finalement : $x=0$ ou $x=-\frac{0{,}2}{0{,}08}=-2{,}5$.
   Mais $-2{,}5\notin[0,1]$, alors l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ dans $[0{,}1]$ est 0.
   On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

4. (a) On veut par récurrence que pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$.
   - **Initialisation** : on a $0\leqslant 0{,}5208\leqslant 0{,}7\leqslant 1$, soit $0\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant 1$: la relation est vraie au rang 0 ;
   - **Hérédité** : Supposons que pour $n\in\mathbb{N}$, on ait :
     $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$; la fonction f étant croissante sur $[0,1]$, on a donc : $f(0)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)\leqslant f(1)$,
     soit puisque $f(0)=0$ et $f(1)=0{,}8\times(1-0{,}1)=0{,}72\leqslant 1$:
     $0\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion :** la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n entier naturel quelconque, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :
     Pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$.

   (b) La suite (u_n) est la question précédente décroissante et minorée par 0 ; elle est donc est convergente vers une limite ℓ telle que $0\leq\ell\leq 1$.

   (c) La fonction f est continue sur $[0,1]$ (car c'est une fonction polynôme). ℓ est donc solution de l'équation $f(x)=x$, dont on a vu à la question **3.** qu'elle n'avait que 0 comme solution sur l'intervalle $[0,1]$. On conclut que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell=0$.

5. (a) L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroit, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

   (b) Le biologiste considère que l'espèce sera menacée si le nombre d'individus devient inférieur ou égal à 30. Son algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont strictement supérieurs à 0,03. Il s'arrête à $n=13$ car $u_{13}\approx 0{,}028$
   L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2034.