Exercice 1
On considére les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

On **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. Calculez u_1 et v_1.
2. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n+1$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Solution

1. $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2 \times u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$.
2. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2u_n + v_n$ donc $v_{n+1} - v_n = 2u_n$.
   D'aprés l'énoncé la suite (u_n) est strictement positive donc, pour tout n, $v_{n+1} - v_n = 2u_n > 0$. La suite (v_n) est donc strictement croissante.
   Comme la suite (v_n) est strictement croissante, elle est minorée par son premier terme, donc pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0$ donc $v_n \geqslant 1$.
3. Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant n+1$.
   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \geqslant 0 + 1$ puisque $u_0 = 1$ alors $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité**
     Supposons que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un entier n, c'est à dire que $u_n \geqslant n+1$ (c'est hypothèse de récurrence) et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
     On a, au rang n, $u_n \geqslant n+1$, on en déduit que $u_n + v_n \geqslant n + 1 + v_n$; Or d'aprés la question 1, $v_n \geqslant 1$ donc $u_n + v_n \geqslant n + 1 + 1$ et puisque $u_{n+1} = u_n + v_n$, on a alors $u_{n+1} \geqslant n + 2$ et donc que la propriété est vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion**
     D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
4. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$, or pour tout n, $u_n \geqslant n+1$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$