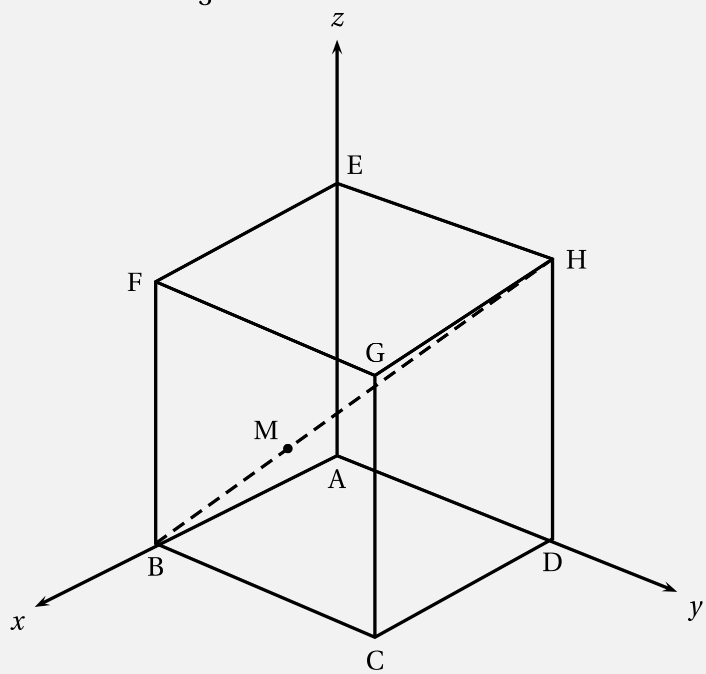
Exercice 4

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BH}}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.
2. **a.** Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

   b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

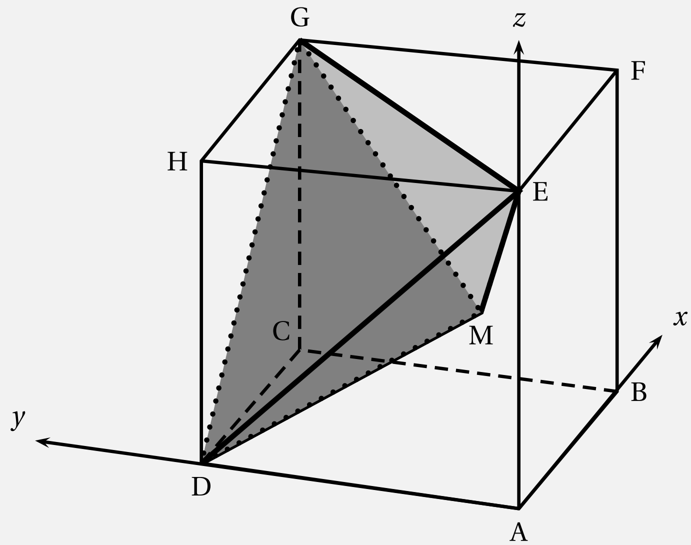
   Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\dfrac{2}{3}\,;\ \dfrac{1}{3}\,;\ \dfrac{1}{3}\right)$.
4. **a.** Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(-1\,;\ 1\,;\ 1)$ est normal au plan (EGD).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

   c. Soit $\mathscr{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.
   Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{2}{3} - t \\ y & = & \dfrac{1}{3} + t \\ z & = & \dfrac{1}{3} + t \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{b \times h}{3}$ où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.

Correction

1. Dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, on a
   $\mathrm{B}(1\,;0\,;0)$, $\mathrm{D}(0\,;1\,;0)$, $\mathrm{E}(0\,;0\,;1)$, $\mathrm{G}(1\,;1\,;1)$, $\mathrm{H}(0\,;1\,;1)$.

2. **a.** Les segments [EG], [ED] et [GD] sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles de côté 1, donc $\mathrm{EG} = \mathrm{ED} = \mathrm{GD} = \sqrt{2}$: le triangle EGD est donc équilatéral.

   b. L'aire a du triangle EGD est donnée par $a = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times c^2$ avec $c = \sqrt{2}$, donc $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Notons $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ les coordonnées du point M. On a alors $\overrightarrow{\mathrm{BM}}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BH}}$, Se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& -\dfrac{1}{3}\\ y &=& \dfrac{1}{3}\\ z &=& \dfrac{1}{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\\ z=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

   Le point M a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

4. **a.** On a $\overrightarrow{\mathrm{EG}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}} = 1\times(-1)+1\times1+0\times1 = 0$. Donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{EG}}$.

   $\overrightarrow{\mathrm{ED}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}} = 0\times(-1)+1\times1-1\times1 = 0$. On a aussi $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{ED}}$

   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ du plan (EGD) : c'est donc un vecteur normal à ce plan.

   b. Le plan (EGD) est l'ensemble des points $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{n} = 0$. On a $\overrightarrow{EP}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$. Donc :

$$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \iff -(x+1)+y+z = 0 \iff -x+y+z-1 = 0$$

   Une équation du plan (EGD) est donnée par : $-x+y+z-1 = 0$.

   c. La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (EGD) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, de plus $\mathscr{D}$ passe par le point $M\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. Donc une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{2}{3}-t\\ y &=& \frac{1}{3}+t\\ z &=& \frac{1}{3}+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

5. **a.** La droite $\mathscr{D}$ contient le point M et est perpendiculaire au plan (EGD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue du sommet M. Le pied de cette hauteur K est l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (EGD) ; ses coordonnées vérifient donc les équations :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \\ -x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x,y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient $-\left(\frac{2}{3} - t\right) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 6 = 0 \iff 3t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{3}$ Ce qui donne $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$

Finalement : K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$.

b. On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{KM}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

D'où $KM = \sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{3}{9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = h$.

Comme l'aire a du triangle (EGD) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$, le volume de la pyramide GEDM est :

$$V = \frac{a \times h}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{1}{6}$$

.