Exercice 4
Commun à tous les candidats

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets coeurs ! ».
Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.

	♡	
♡		
		♡

Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une màłme colonne ou sur une màłme diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\dfrac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1 € sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
   a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
   b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X = 5)$.
   c. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Correction

1. Le nombre de façons différentes de positionner les trois coeurs sur une grille est donné par

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times (9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} 3 \times 4 \times 7 = 84$$

   Il y a 84 façons différentes de choisir 3 cases différentes parmi 9.

2. Il y a 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales donc 8 combinaisons gagnantes.
   La probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\dfrac{8}{84} = \dfrac{2}{21}$.

3. Soit G la variable aléatoire égale au montant algébrique de la somme gagnée. Le joueur ou bien il gagne 5-1=4 € ou bien il perd 1€ on a donc $P(G=4) = \dfrac{2}{21}$ et $P(G=-1) = \dfrac{19}{21}$.
   On a donc $E(G) = 4 \times \dfrac{2}{21} + (-1) \times \dfrac{19}{21} = \dfrac{8-19}{21} = -\dfrac{11}{21} \approx -0,52$.
   En moyenne sur un grand nombre de parties un joueur perd 0,52 € par partie. Le jeu est défavorable au joueur.

4. **a.** Les 20 générations de tickets sont identiques et indépendantes et elles ont deux issues possible : gagner ou on perdre. Donc La variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés suit une loi binomiale de paramètres n = 20 et p = $\frac{2}{21}$ (probabilité de gagner) .

   b. On a $p(X=5) = \binom{20}{5} \times \left(\dfrac{2}{21}\right)^5 \times \left(\dfrac{19}{21}\right)^{20-5} \approx 0,027$.

   c. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \left(\dfrac{2}{21}\right)^0 \times \left(\dfrac{19}{21}\right)^{20} \approx 0,865$.