Correction

1. dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AI}\right)$, on a $K\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$, donc $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$ et $\overrightarrow{AL}\left(0\,;\,1\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$.

2. **a.** • $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AK} = 3-3+0 = 0 : \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AK}$

• $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AL} = 0-3+3 = 0 : \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AL}$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AKL), il est donc un vecteur normal à ce plan.

b. On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AKL}) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \iff 6x-3y+2z=0$.

une équation cartésienne du plan (AKL) est $6x-3y+2z=0$.

c. La droite Δ passe par le point D et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\Delta \iff \overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6t\\ y-1 &=& -3t\\ z &=& 2t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6t\\ y &=& 1-3t\\ z &=& 2t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

d. Le point N est l'intersection du plan (AKL) et la droite Δ, donc ses coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x=6t\\ y=1-3t\\ z=2t\\ 6x-3y+2z=0\end{array}\right.$$

On remplace x,y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la quatrième équation on obtient :

$$6\times 6t+(-3)\times(1-3t)+2\times 2t=0 \iff 36t-3+9t+4t=0 \iff 49t=3 \iff t=\frac{3}{49}$$

On remplace la valeur de t obtenue dans les trois premières équations :

$$\left\{\begin{array}{l} x=6\times\dfrac{3}{49}\\ y=1-3\times\dfrac{3}{49}\\ z=2\times\dfrac{3}{49}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{18}{49}\\ y=\dfrac{40}{49}\\ z=\dfrac{6}{49}\end{array}\right.$$

Le point N a pour coordonnées $\left(\dfrac{18}{49}\,;\,\dfrac{40}{49}\,;\,\dfrac{6}{49}\right)$.

3. **a.** Le triangle ADK est rectangle en D, avec AD = 1 et DK = $\frac{1}{2}$.

Donc l'aire du triangle ADK est

$$\mathscr{A} = \frac{\text{AD}\times\text{DK}}{2} = \frac{1}{4}$$

D'autre part DL = $\frac{3}{2}$, donc le volume du tétraèdre ADKL est :

$$\mathscr{V} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{8}$$

b. la distance du point D au plan (AKL) est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{DN}$. On a $\overrightarrow{DN}\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{40}{49}-1\,;\,\dfrac{6}{49}\right)$, soit $\overrightarrow{DN}\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{-9}{49}\,;\,\frac{6}{49}\right)$, donc :

$$\|\mathrm{DN}\| = \sqrt{\left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{-9}{49}\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2} = \sqrt{\frac{441}{49^2}} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$$

La distance du point D au plan (AKL) est DN $= \dfrac{3}{7}$.

c. Prenons le triangle AKL comme base du tétraèdre ADKL et noton $\mathscr{A}'$ son aire, on a :
$\mathscr{V} = \dfrac{\mathscr{A}' \times \mathrm{DN}}{3}$.
En remplaçant $\mathscr{V}$ et DN par leurs valeurs on obtient :
$\dfrac{1}{8} = \dfrac{\mathscr{A}' \times \frac{3}{7}}{3}$, on en déduit que $\mathscr{A}' = \dfrac{7}{8}$