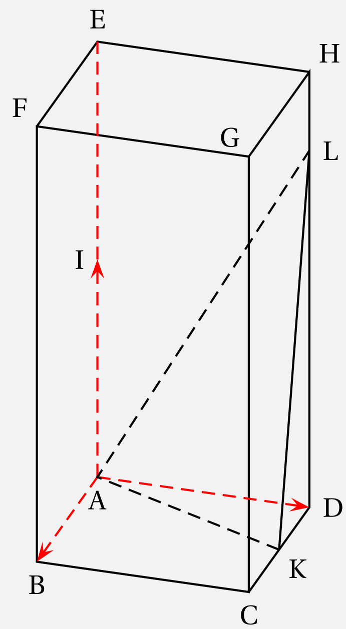
Exercice 6

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous. Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{\text{DL}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\text{AI}}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AI}}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\,;\,1\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AK}}$ et $\overrightarrow{\text{AL}}$.
2. **a.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(6\,;\,-3\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

   c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

   d. En déduire que le point N de coordonnées $\left(\dfrac{18}{49}\,;\,\dfrac{40}{49}\,;\,\dfrac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. **a.** Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.

   b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).

   c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Correction

1. dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AI}}\right)$, on a $\mathrm{K}\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{AK}}\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AL}}\left(0\,;\,1\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$.

2. **a.** • $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AK}} = 3-3+0 = 0$: $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AK}}$

• $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AL}} = 0-3+3 = 0$: $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AL}}$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AKL), il est donc un vecteur normal à ce plan.

b. On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathrm{AKL}) \iff \overrightarrow{\mathrm{A}M}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \iff 6x-3y+2z=0$.

une équation cartésienne du plan (AKL) est $6x-3y+2z=0$.

c. La droite Δ passe par le point D et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\Delta \iff \overrightarrow{\mathrm{D}M} = t\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6t\\ y-1 & = & -3t\\ z & = & 2t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6t\\ y & = & 1-3t\\ z & = & 2t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

d. Le point N est l'intersection du plan (AKL) et la droite Δ, donc ses coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 6t\\ y = 1-3t\\ z = 2t\\ 6x-3y+2z=0\end{array}\right.$$

On remplace x,y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la quatrième équation on obtient :

$$6\times 6t+(-3)\times(1-3t)+2\times 2t = 0 \iff 36t-3+9t+4t=0 \iff 49t=3 \iff t=\frac{3}{49}$$

On remplace la valeur de t obtenue dans les trois premières équations :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 6\times\dfrac{3}{49}\\ y = 1-3\times\dfrac{3}{49}\\ z = 2\times\dfrac{3}{49}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{18}{49}\\ y = \dfrac{40}{49}\\ z = \dfrac{6}{49}\end{array}\right.$$

Le point N a pour coordonnées $\left(\dfrac{18}{49}\,;\,\dfrac{40}{49}\,;\,\dfrac{6}{49}\right)$.

3. **a.** Le triangle ADK est rectangle en D, avec AD = 1 et DK = $\frac{1}{2}$.

Donc l'aire du triangle ADK est

$$\mathscr{A} = \frac{\mathrm{AD}\times\mathrm{DK}}{2} = \frac{1}{4}$$

D'autre part DL = $\frac{3}{2}$, donc le volume du tétraèdre ADKL est :

$$\mathscr{V} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{8}$$

b. la distance du point D au plan (AKL) est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DN}}$. On a $\overrightarrow{\mathrm{DN}}\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{40}{49}-1\,;\,\dfrac{6}{49}\right)$, soit $\overrightarrow{\mathrm{DN}}\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{-9}{49}\,;\,\frac{6}{49}\right)$, donc :

$$\|\mathrm{DN}\| = \sqrt{\left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{-9}{49}\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2} = \sqrt{\frac{441}{49^2}} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$$

La distance du point D au plan (AKL) est $\mathrm{DN} = \dfrac{3}{7}$.

c. Prenons le triangle AKL comme base du tétraèdre ADKL et noton $\mathscr{A}'$ son aire, on a :
$\mathscr{V} = \dfrac{\mathscr{A}' \times \mathrm{DN}}{3}$.
En remplaçant $\mathscr{V}$ et DN par leurs valeurs on obtient :
$\dfrac{1}{8} = \dfrac{\mathscr{A}' \times \frac{3}{7}}{3}$, on en déduit que $\mathscr{A}' = \dfrac{7}{8}$