

Correction

1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 0 \times 5 + 1 \times 2 = 0$ indique que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux.

Le triangle ABC est donc rectangle en A.

2. a. Soit le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les Coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas proportionnelles, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = -4 + 5 - 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur \vec{n} est orthogonal aux deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} non colinéaires, donc il est orthogonal au plan (ABC).

- b. Le vecteur \vec{n} est normal au plan (ABC) par conséquent une équation cartésienne de ce plan est donnée par :

$$2x + 1y + (-1)z + d = 0 \quad \text{où } d \text{ est un réel fixé}$$

De plus le plan (ABC) passe par le point A(2; -1; 0), les coordonnées de A vérifient l'équation de (ABC) :

$$2 \times 2 + (-1) - 0 + d = 0 \iff d = -3$$

Finalement une équation cartésienne de (ABC) est : $2x + y - z - 3 = 0$.

- c. On a S (0; 1; 4) donc $2 \times 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0$, Les coordonnées du point S ne vérifient pas l'équation du plan (ABC), Le point S \notin (ABC) par conséquent les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. a. La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur \vec{n} . De plus elle passe par le point S (0; 1; 4).
Une représentation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 4-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- b. Le point H est l'intersection de la droite (d) et du plan (ABC), donc ses coordonnées vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x & = & 2t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 4-t \\ 2x+y-z-3 & = & 0 \end{cases}$$

On remplace x,y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la quatrième équation, on obtient :

$$2(2t) + (1+t) - (4-t) - 3 = 0 \iff 4t + 1 + t - 4 + t - 3 = 0 \iff t = 1$$

On remplace $t = 1$ dans les trois premières équations du système, on obtient $x = 2 \times 1 = 2$, $y = 1 + 1 = 2$ et $z = 4 - 1 = 3$.

Les coordonnées du point H sont donc (2; 2; 3).

4. Le volume \mathcal{V} d'un tétraèdre est $\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

La base est le triangle ABC rectangle en A dont l'aire est égale à $\mathcal{A} = \frac{AB \times AC}{2}$.

$$AB = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ et } AC = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{30}}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

La hauteur est SH elle vaut $SH = \sqrt{(2-0)^2 + (2-1)^2 + 3-4)^2} = \sqrt{6}$

$$\text{Donc } \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times SH = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{6} = 5$$

5. a. $\vec{SA} : \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-1 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $SA = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

b. On donne la valeur de $SB = \sqrt{17}$ et $\vec{SB} : \begin{pmatrix} 3-0 \\ 1-(-1) \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On exprime de deux manière différentes le produit scalaire

- $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = 2 \times 2 + (-2) \times (-2) + (-4) \times (-2) = 18$;
- $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB})$.

Par conséquent

$$18 = 2\sqrt{6} \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{ASB}) \iff \cos(\widehat{ASB}) = \frac{18}{2\sqrt{6} \times \sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{102}}$$

On trouve au dixième de degré près $\widehat{ASB} \approx 27,0^\circ$.