Exercice 7

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2\ ;\ -1\ ;\ 0), B(3\ ;\ -1\ ;\ 2), C(0\ ;\ 4\ ;\ 1) \text{ et } S(0\ ;\ 1\ ;\ 4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

b. Montrer que les coordonnées du point H sont H(2 ; 2 ; 3).

4. On rappelle que le volume V d'un tetraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

Calculer le volume du tétraèdre SABC.

5. **a.** Calculer la longueur SA.

b. On indique que $SB = \sqrt{17}$.

En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

Correction

1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 0 \times 5 + 1 \times 2 = 0$ indique que les vecteurs $\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Le triangle ABC est donc rectangle en A.

2. **a.** Soit le vecteur $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les Coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = -4 + 5 - 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires, donc il est orthogonal au plan (ABC).

b. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC) par conséquent une équation cartésienne de ce plan est donnée par :

$$2x + 1y + (-1)z + d = 0 \quad \text{où d est un réel fixé}$$

De plus le plan (ABC) passe par le point A(2 ; -1 ; 0), les coordonnées de A vérifient l'équation de (ABC):

$$2 \times 2 + \times (-1) - 0 + d = 0 \iff d = -3$$

Finalement une équation cartésienne de (ABC) est: $2x + y - z - 3 = 0$.

c. On a S (0 ; 1 ; 4) donc $2 \times 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0$, Les coordonnées du point S ne vérifient pas l'équation du plan (ABC), Le point S $\notin$ (ABC) par conséquent les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. **a.** La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$. De plus elle passe par le point S (0 ; 1 ; 4).
Une représentation paramétrique de (d) est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 4-t \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$$

b. Le point H est l'intersection de la droite (d) et du plan (ABC), donc ses coordonnées vérifient le système d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x & = & 2t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 4-t \\ 2x+y-z-3 & = & 0 \end{array} \right.$$

On remplace x,y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la quatrième équation, on obtient :

$$2(2t) + (1+t) - (4-t) - 3 = 0 \iff 4t + 1 + t - 4 + t - 3 = 0 \iff t = 1$$

On remplace $t = 1$ dans les trois premières équations du système, on obtient $x = 2 \times 1 = 2$, $y = 1 + 1 = 2$ et $z = 4 - 1 = 3$.
Les coordonnées du point H sont donc (2 ; 2 ; 3).

4. Le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est $\mathcal{V} = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

La base est le triangle ABC rectangle en A dont l'aire est égale à $\mathcal{A} = \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2}$.

$\text{AB} = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $\text{AC} = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30}$

Donc $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{30}}{2} = \dfrac{\sqrt{150}}{2} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

La hauteur est SH elle vaut $\text{SH} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-1)^2 + 3-4)^2} = \sqrt{6}$

Donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A} \times \text{SH} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{6} = 5$

5. **a.** $\overrightarrow{\text{SA}} : \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-1 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\text{SA} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

b. On donne la valeur de $\text{SB} = \sqrt{17}$ et $\overrightarrow{\text{SB}} : \begin{pmatrix} 3-0 \\ 1-(-1) \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On exprime de deux manière différentes le produit scalaire

- $\overrightarrow{\text{SA}} \cdot \overrightarrow{\text{SB}} = 2 \times 2 + (-2) \times (-2) + (-4) \times (-2) = 18$;
- $\overrightarrow{\text{SA}} \cdot \overrightarrow{\text{SB}} = \text{SA} \times \text{SB} \times \cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)$.

Par conséquent

$$18 = 2\sqrt{6} \times \sqrt{17} \times \cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right) \iff \cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right) = \frac{18}{2\sqrt{6} \times \sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{102}}$$

On trouve au dixième de degré près $\widehat{\text{ASB}} \approx 27,0°$.