

Leçon 210 :Séries à termes réels positifs

February 1, 2022

Contents

1 Généralités	2
2 Théorèmes de comparaison	2
3 Critères de convergences	2
3.1 Séries de Riemann	2
3.2 Séries de Bertrand.	3
3.3 Règle d'Alembert	3
3.4 Règle de de Cauchy	3
3.5 Règle de Duhamel	3

Pré-requis

1. Suites numériques.
2. Séries géométriques.

1 Généralités

Définition 1 Une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est dite "à termes positifs" si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

Proposition 1: Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée. Une série à termes positifs divergente tend nécessairement vers $+\infty$.

2 Théorèmes de comparaison

Théorème 1 : Majoration. Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs si $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge aussi. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge.

Théorème 2 : Domination. Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge aussi. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge.

Exemple : $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^2}$ Converge car $\frac{\ln(n)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

Théorème 3 : Équivalence. Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs si $u_n \sim v_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ Sont de même nature.

Exemple : Soit $(u_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ la suite définie par : $u_1 = 1, \forall n \geq 2, u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$, on montre que $u_n \sim \sqrt{n}$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

Théorème 4 : Comparaison série intégrale. Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et une application $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et décroissante alors l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f$ est convergente si et seulement si la série $\sum f(n)$ est convergente. On peut utiliser la comparaison série intégrale qui donne

$$\forall n \geq n_0, \int_{n+1}^{+\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f$$

3 Critères de convergences

3.1 Séries de Riemann

Proposition 2 : Grâce au théorème 4 on montre que pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Application Règle " $n^\alpha u_n$ "

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs. S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

3.2 Séries de Bertrand.

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixés. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

Exemple: Étude de la série de terme général $(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$.

3.3 Règle d'Alembert

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série à termes strictement positifs on suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 0}$ admet une limite ℓ dans $\mathbb{R}^+$.

a. Si $\ell < 1$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

b. Si $\ell > 1$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

Remarque : Appliquer la règle d'Alembert à une série à termes positifs revient à comparer cette série à des séries géométriques.

Exemple : Série de terme général : $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

3.4 Règle de de Cauchy

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série à termes positifs on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$.

a. Si $\ell < 1$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

b. Si $\ell > 1$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

Exemple : Série de terme général : $(a + \frac{1}{n})^n$.

3.5 Règle de Duhamel

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série à termes positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$ alors

a. Si $\alpha > 1$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

b. Si $\alpha < 1$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

Exemple : Série de terme général : $\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{n!}$.