

Leçon 210 : Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.

February 21, 2022

Contents

1 Séries entières d'une variable complexe	1
1.1 Définitions et notations	1
1.2 Détermination pratique du rayon de convergence	1
1.2.1 Règle de D'Alembert	2
1.2.2 Règle de de Cauchy	2
1.2.3 Règle d'Hadamard	2
2 Propriétés de la somme d'une série entière	2
3 Application des séries entière	2
3.1 Fonctions développables en série entière	2
3.2 Application des développement en série entière	3

1 Séries entières d'une variable complexe

1.1 Définitions et notations

Définition 1. On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes .

Définition 2. : $R = \sup \{r \in \mathbb{R} / (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée} \} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

Proposition 1. On considère $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Soit z un élément de $\mathbb{C}$.

- . Si $|z| < R$ alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente,
- . si $|z| > R$ alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est divergente.

preuve et exemple

1.2 Détermination pratique du rayon de convergence

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

1.2.1 Règle de D'Alembert

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ alors $R = \frac{1}{\ell}$.

preuve et exemple

1.2.2 Règle de Cauchy

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ alors $R = \frac{1}{\ell}$. preuve et exemple

1.2.3 Règle d'Hadarnard

Si $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ alors $R = \frac{1}{\ell}$.

2 Propriétés de la somme d'une série entière

On désigne par $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ Le disque ouvert de $\mathbb{C}$ centré en 0 et de rayon R . $\overline{D(0, R)} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$ Le disque fermé de $\mathbb{C}$ centré en 0 et de rayon R .

Théorème-définition 1 On appelle somme de la série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul l'application définie dans le disque de convergence $D(0, R)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par: $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. S est continue sur $D(0, R)$

Preuve : La série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément dans tout disque fermé $\overline{D(0, \rho)}$ avec $0 < \rho < R$. Donc si z est un point quelconque du disque $D(0, R)$, il vérifie $|z| < R$ et il existe donc un réel ρ vérifiant $|z| < \rho < R$. Alors le point z appartient au disque fermé $\overline{D(0, \rho)}$ et la fonction S est continue en z .

Remarque : il y a convergence uniforme de la série entière dans tout disque $\overline{D(0, \rho)} \subset D(0, R)$, en général, pas dans le disque de convergence $D(0, R)$, mais la somme de la série entière est continue dans tout le disque de convergence.

Exemples:

- Série géométrique $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{z-1}$ est continue sur $D(0, 1)$ (sa restriction à $] -1, 1[$: $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{x-1}$. est uniformément continue sur $[-\rho, \rho] \subset] -1, 1[$, $0 < \rho < 1$).
- $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ est continue sur $\overline{D(0, 1)}$

Théorème-définition 2: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. On note encore S la restriction à l'intervalle $] -R, R[$ de la somme de la série entière, c'est-à-dire la fonction définie sur $] -R, R[$ par $S(x) = \sum a_n x^n$.

La fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et, pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, on a $S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} x^n$.

La fonction S admet pour primitives sur $] -R, R[$ l'ensemble des fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$

3 Application des séries entière

3.1 Fonctions développables en série entière

Définition 3 : On dit que f est développable en série entière sur un intervalle $] -\alpha, \alpha[$ au voisinage de 0, s'il existe un réel $\alpha > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ telle que : $\forall x \in] -\alpha, \alpha[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Proposition 2. Si une fonction f est développable en série entière sur un intervalle $] -\alpha, \alpha[$, alors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle, le développement est unique et $\forall x \in] -\alpha, \alpha[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Exemple $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

A partir des développements de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et de $(1+x)^\alpha$ sur $] -1, 1[$ on peut calculer ceux des fonctions usuelles par opérations algébriques, dérivation et intégration.

3.2 Application des développement en série entière

- a. **Développements limités, équivalent.** Exemple: Étude de la suite de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- b. **Résolution d'équation différentielle.** Exemple : recherche des solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle $y'' - xy = 0$.
- c. **Calcul d'intégrales par développement en série et intégration terme à terme.**
- d. **Calcul de valeurs approchées d'une fonction**
- e. **Résolution d'équation fonctionnelle** Exemple $f(x) + f(x^2) = x$.