

220 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur.

Harkati Ali

February 2022

Table des matières

1	Méthode des rectangles	2
2	Méthode du point milieu	2
3	Méthode des trapèzes	3
4	Méthode de Simpson	4
5	Avec des séries entières	4
6	Démonstrations des théorèmes	5
6.1	Théorème 1.1	5

Bibliographie

- **Thierry Meyre : Séries, intégrales et probabilités** :p.114. Livre disponible dans la bibliothèque de l'agrégation et sur internet https://www.math.univ-paris-diderot.fr/_media/formations/prepa/agreginterne/series-integral.pdf
- **Jean-Pierre Escofier : Toute l'analyse de la Licence** p.324

Le problème central de la théorie des séries de Fourier est de savoir comment des fonctions ou des signaux périodiques arbitraires peuvent être écrits sous la forme d'une série de fonctions sinus et cosinus.

Soit a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction régulière. $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision régulière de $[a, b]$. On remplace f sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ par une fonction polynôme qu'on peut intégrer. Pour chacune des méthodes, on donnera un majorant de la valeur absolue de la différence entre l'intégrale et sa valeur approchée. Un tel majorant permet de déterminer, à priori, le pas de la subdivision à utiliser pour obtenir une approximation à $\epsilon > 0$ près.

1 Méthode des rectangles

Sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, f est remplacé par la fonction constante $f(x_k)$. L'intégrale de la fonction escalier obtenue est alors $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$

Théorème 1.1: Majoration de l'approximation par la méthode des rectangles.

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note, pour $n \geq 1$,

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \quad \text{et} \quad M_1 = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

On a alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt - R_n(f) \right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.$$

Application : On considère $f(x) = e^{-x^2}$ sur $[0, 1]$. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ Pour $x \in [0, 1]$, on a $|2x| \leq 2$ et $|e^{-x^2}| \leq 1$, et donc $M_1 \leq 2$ l'écart est donc majorée par $\frac{1}{n}$. la fonction python suivante *integral(ecart)* donne une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2} dt$ avec un écart inférieur à *ecart*.

```
1 import math
2 def integral(ecart):
3     n=math.floor(1/ecart)+1
4     r=0
5     for k in range(n):
6         r=r+math.exp(-(k/n)**2)
7     return r/n
```

Pour $ecart \leq 10^{-5}$, $n = 10^5 + 1$ et $\int_0^1 e^{-x^2} dt \approx 0.746827$

2 Méthode du point milieu

Théorème 2.1: Majoration de l'approximation par la méthode du point milieu.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On pose $I = \int_a^b f(t) dt$, Pour tout $n \geq 1$, on pose $P_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$ où $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On note $M_2 = \max\{|f''(x)|; x \in [a, b]\}$. on a alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx - P_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2.$$

On Remarque que la méthode du point milieu est beaucoup plus efficace que la méthode des rectangles, puisqu'elle garantit une convergence en $1/n^2$ et non en $1/n$.

Application : On considère $f(x) = e^{-x^2}$ sur $[0, 1]$. $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ Pour $x \in [0, 1]$, on a $|4x^2 - 2| \leq 2$ et $|e^{-x^2}| \leq 1$, et donc $M_2 \leq 2$ l'écart est donc majorée par $\frac{1}{12n^2}$. la fonction python suivante *integral(ecart)* donne une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2} dt$ avec un écart inférieur à *ecart*.

```
1 import math
2 def integral(ecart):
3     n=math.floor(1/(12*ecart)**0.5)+1
4     p=0
5     for k in range(n):
6         p=p+math.exp(-((2*k+1)/(2*n))**2)
7     return p/n
8 I= integral(10**(-5))
9 print "I=", I
```

Pour $ecart \leq 10^{-5}$, $n = 92$ et $\int_0^1 e^{-x^2} dt \approx 0.746827$

3 Méthode des trapèzes

Théorème 3.1: Majoration de l'approximation par la méthode des trapèzes.

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On pose $I = \int_a^b f(t)dt$, Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$T_n = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}.$$

où $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$. On note $M_2 = \max\{|f''(x)|; x \in [a, b]\}$. on a alors

$$|I - T_n| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}.$$

On remarque que la méthode des trapèzes multiplie le nombre de calculs n par un facteur $\sqrt{2}$ par rapport à la méthode du point milieu.

Application : On considère $f(x) = e^{-x^2}$ sur $[0, 1]$. $M_2 \leq 2$ l'écart est donc majorée par $\frac{1}{6n^2}$. la fonction python suivante *integral(ecart)* donne une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2} dt$ avec un écart inférieur à *ecart*.

```
1 import math
2 def integral(ecart):
3     n=math.floor(1/(6*ecart)**0.5)+1
4     t=0
5     for k in range(n):
6         t=t+(math.exp(-(k/n)**2)+math.exp(-((k+1)/n)**2))
7     return t/(2*n)
8 I= integral(10**(-5))
9 print "I=", I
10 #I= 0.746820504803
```

Pour $ecart \leq 10^{-5}$, $n = 183$ et $\int_0^1 e^{-x^2} dt \approx 0.74682$

4 Méthode de Simpson

Théorème 4.1: Majoration de l'approximation par la méthode de Simpson.

Soit f une fonction de classe C^4 sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On pose $I = \int_a^b f(t)dt$, Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \frac{b-a}{3n} \sum_{k=0}^{n-1} 2f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

où $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On note $M_2 = \max\{|f^{(4)}(x)|; x \in [a, b]\}$. on a alors

$$|I - S_n| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}.$$

Application : On considère $f(x) = e^{-x^2}$ sur $[0, 1]$. $|f^{(4)}(x)| = 4(4x^2 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ Pour $x \in [0, 1]$, on a $|4(4x^2 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}| \leq 12$ et donc $M_4 \leq 12$ l'écart est donc majorée par $\frac{1}{240n^4}$. la fonction python suivante `integral(ecart)` donne une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2} dt$ avec un écart inférieur à `ecart`.

```
1 import math
2 import math
3 def integral(ecart):
4     n=math.floor(1/(240*ecart)**0.25)+1
5     s=0
6     for k in range(n):
7         s=s+2*math.exp(-((2*k+1)/(2*n))**2)+0.5*(math.exp(-(k/n)**2)+math.exp(-((k+1)/n)**2))
8     return s/(3*n)
9 I= integral(10**(-5))
10 print "I=",I
11 #####
12 '#I= 0.746824948254# résultat de l'exécution
```

Pour $\text{ecart} \leq 10^{-5}$, $n = 5$ et $\int_0^1 e^{-x^2} dt \approx 0.746827$.

Avec la méthode de Simpson pour la même précision $\epsilon = 10^{-5}$, Le nombre de calculs effectués a diminué considérablement $n = 5$.

5 Avec des séries entières

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

```
1
2 from math import factorial
3 def somme(n):
4     s=0
5     for k in range(0,n,1):
6         s+=(-1)**k/factorial(k)/(2*k+1)
7     return s
8 print "s=",somme(10)
9 s= 0.746824120701
```

6 Démonstrations des théorèmes

6.1 Théorème 1.1

Démonstration 1. soit $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $t \in [\alpha, \beta]$ on a

$$|g(t) - g(\alpha)| \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |g'(x)| \times |t - \alpha|.$$

On intègre cette inégalité entre α et β on trouve que

$$\int_{\alpha}^{\beta} |g(t) - g(\alpha)| dt \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |g'(x)| \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \quad (\clubsuit)$$

• D'une part, par la relation de Chasles, on remarque que :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a + \frac{k(b-a)}{n}}^{a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(t) dt.$$

• D'autre part, pour chaque $k = 0, \dots, n-1$, on a également

$$\frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_{a + \frac{k(b-a)}{n}}^{a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale et par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| \int_a^b f(t) dt - R_n(f) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a + \frac{k(b-a)}{n}}^{a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left| f(t) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right| dt.$$

On est exactement dans les conditions d'application de la l'inégalité ($\clubsuit$), et on a, pour chaque $k = 0, \dots, n-1$,

$$\int_{a + \frac{k(b-a)}{n}}^{a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left| f(t) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right| dt \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n^2}.$$

Puisqu'on somme n fois ces termes, on obtient bien l'inégalité énoncée.