

Correction

Partie I

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - e^{-2x}$

- On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-2x} = -\infty$; donc par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$; donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. la fonction f est somme de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , $x \mapsto x$ et $x \mapsto -e^{-2x}$, donc f est dérivable sur cet intervalle : $f'(x) = 1 - (-2)e^{-2x} = 1 + 2e^{-2x}$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$, on alors $1 + 2e^{-2x} > 1 > 0$. La dérivée f' est strictement positive sur \mathbb{R} donc la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

3. La fonction f est continue car et strictement croissante sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ; et comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.

$f(0) = -1$ et $f(1) \approx 0,865$, donc $0 < \alpha < 1$;

Avec la calculatrice on obtient

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
f(x)	-1	-0,718730753	-0,470320046	-0,248811636	-0,049328964	0,132120559

$f(0,4) \approx -0,05$ et $f(0,5) \approx 0,13$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$;

x	0,4	0,41	0,42	0,43
f(x)	-0,049328964	-0,030431655	-0,011710523	0,006837918

$f(0,42) \approx -0,01$ et $f(0,43) \approx 0,007$, donc $0,42 < \alpha < 0,43$.

4. On a donc :

- sur $] -\infty ; \alpha[$, $f(x) < 0$;
- sur $] \alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$;
- et $f(\alpha) = 0$.

Partie II

1.

$$h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$$

a. Posons $u(t) = t^2 + e^{-2t}$, donc $h(t) = \sqrt{u(t)}$. La fonction h est dérivable car composée de deux fonctions dérivables : $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto t^2 + e^{-2t}$.

$$\text{Donc } h'(t) = \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \frac{2t - 2e^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \frac{t - e^{-2t}}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

- b.** La distance du point de la courbe \mathcal{C} le plus proche de l'origine O correspond au minimum de la fonction h .

Comme le dénominateur est strictement positif, pour déterminer le signe de $h'(t)$ il suffit d'étudier le signe du numérateur qui est celui de $f(t)$ dont on a vu le signe dans la question 4.

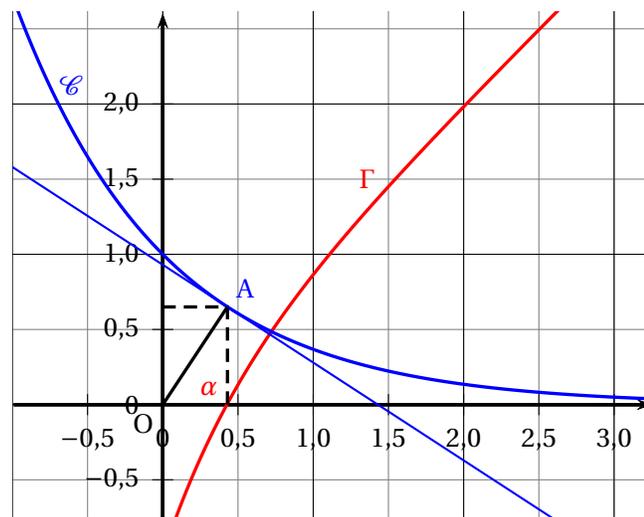
Donc :

- sur $]-\infty ; \alpha[$, $f(t) < 0$ donc $h'(t) < 0$: la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle ;
- sur $]\alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$ donc $h'(t) > 0$: la fonction est strictement croissante sur cet intervalle ;
- et $f(\alpha) = 0$, la dérivée h' s'annule en α en changeant de signe, donc $h(\alpha)$ est le minimum de la fonction h .

La distance OM est donc minimale pour $t = \alpha$ et l'ordonnée de M correspondante est alors $e^{-\alpha}$.

Le point de la courbe le plus proche de l'origine est donc le point $A(\alpha ; e^{-\alpha})$.

Comme $f(\alpha) = 0$, $x = \alpha$ correspond l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Le point A a pour abscisse α et appartient à \mathcal{C} .



- 2. a.** Le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse α est $m = g'(\alpha) = -e^{-\alpha}$
- b.** D'après le rappel le coefficient directeur de la droite (OA) est $m' = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ donc

$$mm' = -e^{-\alpha} \times \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} = -\frac{e^{-2\alpha}}{\alpha}$$

or on sait que

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha - e^{-2\alpha} = 0 \iff \alpha = e^{-2\alpha} \iff \frac{e^{-2\alpha}}{\alpha} = 1$$

finalement le produit des coefficients directeurs $mm' = -1$. La droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires. Voir le graphique ci-dessus