Correction

Partie 1

1. D'après la courbe représentative de la fonction dérivée f' :

- pour $x \in]-\infty\ ;\ 1]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle ;
- Pour $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

2. D'après la courbe représentative de la fonction dérivée f' :

- la fonction f' est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle ;
- la fonction f' est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\text{e}^{-x} = x\text{e}^{-x} + 2\text{e}^{-x} = \dfrac{x}{\text{e}^x} + 2\text{e}^{-x}$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\text{e}^x} = 0$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est donc asymptote horizontale en $+\infty$ de la courbe $\mathscr{C}$.

On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times \text{e}^{-x} + (x+2) \times (-1)\text{e}^{-x} = (1-x-2)\text{e}^{-x} = (-x-1)\text{e}^{-x}$.

b. Pour tout x, $\text{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$; donc $f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$ pour $x < -1$ et $f'(x) < 0$ pour $x > -1$.

$f(-1) = (-1+2)\text{e}^1 = \text{e}$; on dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

c. Sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$, la fonction f est strictement croissante et continue car dérivable sur cet intervalle. $f(-2) = 0 < 2$ et $f(-1) = \text{e} > 2$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$.

3. $f''(x) = (-1) \times \text{e}^{-x} + (-x-1) \times (-1)\text{e}^{-x} = (-1+x+1)\text{e}^{-x} = x\text{e}^{-x}$

$\text{e}^{-x} > 0$ pour tout x, donc $f''(x)$ est du signe de x.

- Sur $]-\infty\ ;\ 0[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
- Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
- En $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$ est le point d'inflexion de cette courbe.