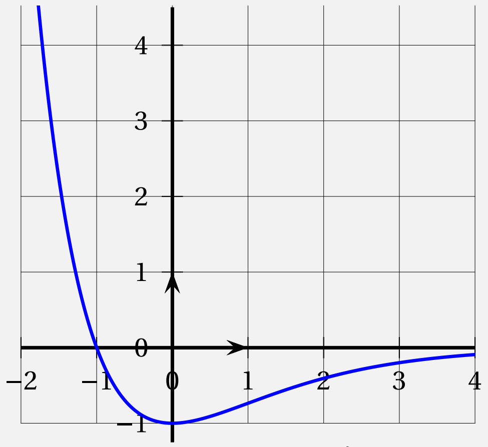
Exercice 10

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x,

   $$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^{-x}.$$

   En déduire la limite de f en $+\infty$.

   Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

   On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

   c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.

   Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

Correction

Partie 1

1. D'après la courbe représentative de la fonction dérivée f' :

- pour $x \in]-\infty\,;\,1]$, $f'(x) \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle ;
- Pour $x \in]1\,;\,+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

2. D'après la courbe représentative de la fonction dérivée f' :

- la fonction f' est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle ;
- la fonction f' est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est donc asymptote horizontale en $+\infty$ de la courbe $\mathscr{C}$.

On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (1-x-2)\mathrm{e}^{-x} = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$; donc $f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$ pour $x < -1$ et $f'(x) < 0$ pour $x > -1$.

$f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$; on dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

c. Sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$, la fonction f est strictement croissante et continue car dérivable sur cet intervalle. $f(-2) = 0 < 2$ et $f(-1) = \mathrm{e} > 2$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$.

3. $f''(x) = (-1) \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (-1+x+1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$

$\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x, donc $f''(x)$ est du signe de x.

- Sur $]-\infty\,;\,0[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
- Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
- En $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$ est le point d'inflexion de cette courbe.