Correction

1. Pour $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \dfrac{3}{x}$. D'après le cours $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-4\frac{\ln(x)}{x}\right)+4-\frac{3}{x}\right) = +\infty$$

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$

$$f'(x) = 1 + 0 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^2-4x+3}{x^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{x^2}$$

3. **a.** Comme le dénominateur de $f'(x)$ est $x^2 > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, le signe de de $f'(x)$ est celui de son numérateur $(x-1)(x-3)$. On a donc $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [1, 3]$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in]0\,;1[\cap]3;\,+\infty[$.
On dresse le tableau des variations de f

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6-4\ln(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $f(1) = 2$, $f(3) = 6 - \ln(3) \approx 1,61$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$:

b. • Comme $\dfrac{5}{3} \in]-\infty\,;\,2]$, l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet donc une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

• $\dfrac{5}{3} \approx 1,67$ et $f(3) = 6 - 4\ln 3 \approx 1,61$ donc $\dfrac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\,2]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;\,3[$.

• $\dfrac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\,+\infty[$, donc $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

L'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet donc trois solutions dans $]0\,;\,+\infty[$.

4. La convexité de la fonction f est déterminée par le signe sa dérivée seconde f'',

$f'(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$ donc

$f''(x) = \dfrac{(2x-4)\times x^2 - (x^2-4x+3)\times 2x}{x^4} = \dfrac{(2x^2-4x-2x^2+8x-6)\times x}{x^4} = \dfrac{4x-6}{x^3}$

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$ la dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{3}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$.