## Correction

1. **a.** Par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$.

   **b.** On a $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, par produit des limites on obtient : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$.
   Ainsi, l'axe des ordonnées ($x = 0$) est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. La fonction $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, comme quotient de fonctions dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, dont le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. Pour tout réel $x \in ]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} \times x - \mathrm{e}^{x} \times 1}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^{x}(x-1)}{x^2}$$

.

3. Comme $\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^2}$ est positif, pour déterminer le signe de $f'$ il suffit d'étudier le signe de $(x-1)$ sur $]0,+\infty[$. On a donc $f'(x) < 0$ pour $x \in ]0,1[$, $f'(x) < 0$ pour $x \in ]1,+\infty[$ et $f'(1) = 0$.
   On en déduit le tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\|\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $\mathrm{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

   Avec $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^{1}}{1} = \mathrm{e}$

4. Grâce au tableau variations de la fonction $f$ on constate que l'équation $f(x) = m$ :
   (i). n'admet pas de solution si $m < \mathrm{e}$ ;
   (ii). admet une solution unique $x = 1$, si $m = \mathrm{e}$ ;
   (iii). admet deux solutions, si $m > \mathrm{e}$.

5. **a.** Le coefficient directeur de la droite $\Delta$ est égale à $-1$ et celui de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$ est $f'(a)$ donc ces deux droites sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux. c'est à dire $f'(a) = -1$.
   $f'(a) = -1 \iff \dfrac{\mathrm{e}^{a}(a-1)}{a^2} = -1 \iff \mathrm{e}^{a}(x-1) = -a^2 \iff \mathrm{e}^{a}(x-1) + a^2 = 0$
   Autrement dit le réel $a$ est solution de l'équation $\mathrm{e}^{x}(x-1) + x^2 = 0$.

   **b.** On note $g$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{x}(x-1) + x^2$. $g$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$

$$g'(x) = \mathrm{e}^{x} \times (x-1) + \mathrm{e}^{x} \times 1 + 2x = x\mathrm{e}^{x} + 2x$$

   On a pour $x \in [0\,;\,+\infty[, \mathrm{e}^{x} > 0$ et donc $x\mathrm{e}^{x} + 2x \geqslant 0$ on en déduit que $g'(x) \geqslant 0$. On calcule la limite de $g$ en $+\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)\mathrm{e}^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ par somme des limites on conclut que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
   On dresse le tableau de variations de la fonction $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$ :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

   Avec $g(0) = \mathrm{e}^{0}(0-1) + 0 = -1$

   **c.** D'après ce tableau de variation ci-dessus, la fonction $g$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Comme $g(0) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et comme $0 \in [-1,+\infty[$ donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $a$ sur $[0\,;\,+\infty[$, par conséquent il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite $\Delta$.