

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1.
 - a. Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f .
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.
4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
On note A un éventuel point de \mathcal{C}_f d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe \mathcal{C}_f est parallèle à la droite Δ .
 - a. Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.
On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.
 - b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$.
 - c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à \mathcal{C}_f est parallèle à la droite Δ .