Exercice 5

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. **a.** Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

   a. Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.
   On note g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

   b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Correction

1. **a.** Par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

b. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$, par produit des limites on obtient : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
Ainsi, l'axe des ordonnées ($x = 0$) est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, comme quotient de fonctions dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, dont le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. Pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

.

3. Comme $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ est positif, pour déterminer le signe de f' il suffit d'étudier le signe de $(x-1)$ sur $]0, +\infty[$. On a donc $f'(x) < 0$ pour $x \in]0,1[$, $f'(x) < 0$ pour $x \in]1, +\infty[$ et $f'(1) = 0$.
On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^1}{1} = \mathrm{e}$

4. Grâce au tableau variations de la fonction f on constate que l'équation $f(x) = m$:

(i). n'admet pas de solution si $m < \mathrm{e}$;

(ii). admet une solution unique $x = 1$, si $m = \mathrm{e}$;

(iii). admet deux solutions, si $m > \mathrm{e}$.

5. **a.** Le coefficient directeur de la droite Δ est égale à -1 et celui de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est $f'(a)$ donc ces deux droites sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux. c'est à dire $f'(a) = -1$.

$$f'(a) = -1 \iff \frac{\mathrm{e}^a(a-1)}{a^2} = -1 \iff \mathrm{e}^a(x-1) = -a^2 \iff \mathrm{e}^a(x-1) + a^2 = 0$$

Autrement dit le réel a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.

b. On note g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$. g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$

$$g'(x) = \mathrm{e}^x \times (x-1) + \mathrm{e}^x \times 1 + 2x = x\mathrm{e}^x + 2x$$

On a pour $x \in [0\,;\,+\infty[, \mathrm{e}^x > 0$ et donc $x\mathrm{e}^x + 2x \geqslant 0$ on en déduit que $g'(x) \geqslant 0$. On calcule la limite de g en $+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x-1)\mathrm{e}^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ par somme des limites on conclut que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
On dresse le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $g(0) = \mathrm{e}^0(0-1) + 0 = -1$

c. D'après ce tableau de variation ci-dessus, la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $g(0) < 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et comme $0 \in [-1, +\infty[$ donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique a sur $[0\,;\,+\infty[$, par conséquent il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.