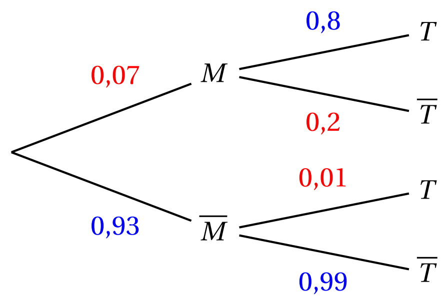
Correction

1. D'après l'énonce, $P(M) = 0,07$, $P_M(\overline{T}) = 0,2$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$. On complète ces données sur un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. **a.** L'évènement "La personne est infectée et son test est positif" s'écrit $M \cap T$. sa probabilité est donnée par le premier chemin de l'arbre :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$$

b. On cherche $P(T)$. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right)$$

Avec, $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$. Donc

$$P(T) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$$

3. On utilise la formule de la probabilité conditionnelle

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,85758$$

soit $P_T(M) \approx 0,86$ à 10^{-2} près.

4. **a.** La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$.

b. On a

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 = 45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 \approx 0,1118.$$

Soit $P(X = 2) \approx 0,11$ à 10^{-2} près.

5. Si n est le nombre de personnes testées, on alors $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,0653^0 \times (1 - 0,0653)^n = 1 - 0,9347^n$ et on veut que cette probabilité soit supérieure à $0,99$

$P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,9347^n$ soit en prenant le logarithme népérien :

$\ln 0,01 > n \ln 0,9347 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} < n.$

On calcule $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \approx 68,2.$

Conclusion : il faut tester au moins 69 personnes au minimum pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.