

### Exercice 6

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

On note  $\mathcal{C}$  la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout nombre réel  $x > 0$ , on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

3.
  - a. Donner le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .  
On admettra que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .
  - b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = \frac{5}{3}$ .
4. étudier la convexité de la fonction  $f$  c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle  $]0; +\infty[$  sur lesquelles  $f$  est convexe, et celles sur lesquelles  $f$  est concave.  
On justifiera que la courbe  $\mathcal{C}$  admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.