**Exercice 6**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
2. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
   $$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$
3. **a.** Donner le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
   On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

   **b.** Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.
4. étudier la convexité de la fonction $f$ c'est-à -dire préciser les parties de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ sur lesquelles $f$ est convexe, et celles sur lesquelles $f$ est concave.
   On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

## Correction

**1.** Pour $x \in ]0,+\infty[$, $f(x) = x\left(1-4\dfrac{\ln(x)}{x}\right)+4-\dfrac{3}{x}$. D'après le cours $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-4\frac{\ln(x)}{x}\right)+4-\frac{3}{x}\right)=+\infty$$

**2.** La fonction $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$

$$f'(x) = 1+0-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2} = \frac{x^2-4x+3}{x^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{x^2}$$

**3.** **a.** Comme le dénominateur de $f'(x)$ est $x^2>0$ pour tout $x\in]0,+\infty[$, le signe de de $f'(x)$ est celui de son numérateur $(x-1)(x-3)$. On a donc $f'(x)\leq 0$ pour $x\in[1,3]$ et $f'(x)>0$ pour $x\in]0\,;1[\cap]3;\,+\infty[$.
On dresse le tableau des variations de $f$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $6-4\ln(3)$ | ↗ | $+\infty$ |

Avec $f(1)=2$, $f(3)=6-\ln(3)\approx 1{,}61$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ :

**b.** • Comme $\dfrac{5}{3}\in]-\infty\,;\,2]$, l'équation $f(x)=\dfrac{5}{3}$ admet donc une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

• $\dfrac{5}{3}\approx 1{,}67$ et $f(3)=6-4\ln 3\approx 1{,}61$ donc $\dfrac{5}{3}\in[6-4\ln 3\,;\,2]$, donc l'équation $f(x)=\dfrac{5}{3}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;\,3[$.

• $\dfrac{5}{3}\in[6-4\ln 3\,;\,+\infty[$, donc $f(x)=\dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

L'équation $f(x)=\dfrac{5}{3}$ admet donc trois solutions dans $]0\,;\,+\infty[$.

**4.** La convexité de la fonction $f$ est déterminée par le signe sa dérivée seconde $f''$,
$f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$ donc
$f''(x)=\dfrac{(2x-4)\times x^2-(x^2-4x+3)\times 2x}{x^4}=\dfrac{(2x^2-4x-2x^2+8x-6)\times x}{x^4}=\dfrac{4x-6}{x^3}$
Sur l'intervalle $]0,+\infty[$ la dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x=\dfrac{3}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}+4-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{\frac{3}{2}}=\frac{11}{2}-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)-2=\frac{7}{2}-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{7}{2}-4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$.