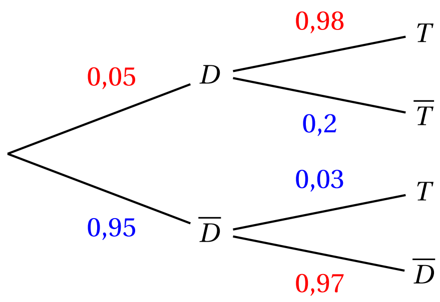
Correction

PARTIE I

1. D'après l'énonce,$P(D) = 0,05$, $P_D(T) = 0,98$ et $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0,97$. On complète ces données sur un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. **a.** L'évènement "Une pièce est défectueuse et présente un test positif" s'écrit $D \cap T$,sa probabilité est donnée par le premier chemin de l'arbre :

$$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,05 \times 0,98 = 0,049$$

b. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P\left(\overline{D} \cap T\right).$$

Avec, $P\left(\overline{D} \cap T\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,95 \times 0,3 = 0,0285$. Donc $P(T) = 0,049 + 0,0285 = 0,0775$.

3. La valeur prédictive positive du test est donnée par :

$$P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,049}{0,0775} \approx 0,6322.$$

Soit $P_T(D) \approx 0,632$ au millième près.

Le test n'est pas efficace car $P_T(D) < 0,95$.

PARTIE II

1. Le choix de l'échantillon étant assimilé à un tirage avec remise avec la probabilité de choisir un produit défectueux égale à $0,05$, on peut donc dire que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,05$.
2. "L'échantillon contient au moins une pièce défectueuse" correspond à $X \geqslant 1$. On cherche $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$ Or $p(X = 0) = 0,95^{20}$. Donc $p(X \geqslant 1) = 1 - 0,95^{20} \approx 0,642$. Soit $p(X \geqslant 1) = 0,64$ au centième près.
3. D'après le cours on a : $E(X) = n \times p = 20 \times 0,05 = 1$.

   Conclusion Pour un grand nombre de tirages d'échantillons on trouvera 1 pièce défectueuse sur 20 pièces tirées.